De plus, pour $\lambda > \|T\|$ on a :

$$R(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}T - I\right)^{-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} T^n .$$

Par conséquent, ~~(pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{C})$)~~ on a pour $\lambda > \|T\|$:

$$\varphi \circ R(\lambda) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} \cdot \varphi(T^n).$$

Notons, pour $0 < |\lambda| < \frac{1}{r(T)}$, $G(\lambda) = \varphi \circ R\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

Alors G est holomorphe sur $D\left(0, \frac{1}{r(T)}\right) \setminus \{0\}$, et a une singularité ~~effaçable~~ effaçable en 0 $\left(R(\lambda) \xrightarrow[|\lambda| \to +\infty]{} 0\right)$

Donc $G(\lambda) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+1} \cdot \varphi(T^n)$ sur tout $D\left(0, \frac{1}{r(T)}\right)$

On obtient alors, pour tout $\rho > r(T)$, l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(0, \frac{1}{\rho})} \lambda^{-(n+2)} G(\lambda)\, d\lambda = \varphi(T^n)$$

On est arrivé à isoler $\varphi(T^n)$, ce qui va nous permettre d'estimer $\|T^n\|$ (en passant au sup sur les φ de norme 1) puis $\|T^n\|^{1/n}$.

En effet, on obtient, pour tout $\rho > r(T)$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \rho^{n+1} \cdot \sup\left\{|G(\lambda)| : |\lambda| = \frac{1}{\rho}\right\} \geq |\varphi(T^n)|$$

Autrement dit, $|\varphi(T^n)| \leq \rho^{n+1} \cdot \sup\{|\varphi(R(\lambda))| : |\lambda| = \rho\}$

$$|\varphi(T^n)| \leq \rho^{n+1} \cdot \|\varphi\| \cdot \sup\{\|R(\lambda)\| : |\lambda| = \rho\}$$

En passant au sup sur les φ de norme 1 (grâce à Hahn-Banach) :

$$\|T^n\| \leq \rho^{n+1} \cdot \sup\{\|R(\lambda)\| : |\lambda| = \rho\}$$

$$\|T^n\|^{1/n} \leq \rho \cdot \underbrace{\rho^{1/n} \cdot \sup\{\|R(\lambda)\| : |\lambda| = \rho\}^{1/n}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}$$

En passant à la limite pour $n \to +\infty$:

$\ell \leq \rho$. On conclut finalement que $\ell \leq r(T)$ □

Opérateurs compacts

Def : Soit E, F deux espaces de Banach. $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est un opérateur compact si $\overline{T(B_E)}$ est compact dans F.

Rqe :
- "opérateur" signifie ici "application linéaire continue".
- Même si on ne supposait pas T continue, le fait que $\overline{T(B_E)}$ est compact entraîne qu'il est borné, et donc T est continue dès que $\overline{T(B_E)}$ est compact.

Exemple : Tout opérateur de rang fini est compact.

Exercice :
- Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est compact et $S \in \mathcal{L}(F,G)$, alors ST est compact.
- Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $S \in \mathcal{L}(F,G)$ est compact, alors ST est compact.

Thm : Les opérateurs compacts forment un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E,F)$. On le note $\mathcal{K}(E,F)$

Preuve : Commençons par remarquer que si K, L sont compacts dans F alors $K+L = \{x+y : (x,y) \in K \times L\}$ est l'image continue du compact $K \times L$ (par l'application $(x,y) \mapsto x+y$) et est donc compact.

- L'application nulle est un opérateur compact : $0 \in \mathcal{K}(E,F)$.
- Si $T \in \mathcal{K}(E,F)$ et λ est un scalaire, $(\lambda T)(B_E) = \lambda . T(B_E)$

  Donc $\overline{(\lambda T)(B_E)} = \lambda . \overline{T(B_E)}$ est compact : $\lambda T \in \mathcal{K}(E,F)$
- Soit $T, S \in \mathcal{K}(E,F)$, $K_T = \overline{T(B_E)}$ et $K_S = \overline{S(B_E)}$.

  Pour tout $x \in B_E$ $(T+S)(x) = T(x) + S(x) \in T(B_E) + S(B_E)$

  Donc $(T+S)(x) \in K_T + K_S$: $(T+S)(B_E) \subseteq K_T + K_S$.

  Comme $K_T + K_S$ est compact, $\overline{(T+S)(B_E)} \subseteq K_T + K_S$ est un fermé du compact $K_T + K_S$: $T+S$ est un opérateur compact.

Ceci montre que $\mathcal{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

Soit $(T_n)_n \in \mathcal{K}(E,F)$ qui converge vers T dans $\mathcal{L}(E,F)$.
Soit $\varepsilon > 0$, et n tq $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$.

Puisque $T_n(B_E)$ est précompact, il existe $x_1, \dots x_k \in B(E)$ tels que : $\forall x \in B_E \; \exists i \in \{1, \dots k\} \; \| T_n(x) - T_n(x_i) \| \leq \varepsilon$.

Alors : $\forall x \in B_E \; \exists i \in \{1, \dots k\} \; \|T(x) - T(x_i)\| \leq 3\varepsilon$: T est compact n