En particulier, si T est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini, alors T est compact.

La réciproque est fausse en général, mais les contre-exemples sont difficiles à construire.

À partir de maintenant on va se concentrer sur le cas des opérateurs compacts $T : H \to H$, où H est un espace de Hilbert (réel ou complexe, pour le moment) séparable.

Thm : Soit H un Hilbert séparable, et $T \in K(H)$. Alors il existe une suite d'opérateurs de rang fini $(T_n)_n$ tq $\|T_n - T\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Preuve : Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H, et soit $H_n = \mathrm{Vect}(\{e_i\}_{i\leq n})$.

Soit $\lambda_n = \|T_{|H_n^\perp}\|$; $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

Montrons que $(\lambda_n)_n$ converge vers 0. Si ce n'est pas le cas, il existe $\varepsilon > 0$ tq pour tout n il existe $x_n \in H_n^\perp$ avec $\|x_n\| = 1$ et $\|T(x_n)\| \geq \varepsilon$.

Comme $\overline{T(B_E)}$ est compact, on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\|T(x_{\varphi(n)})\| \to y$, avec $\|y\| \geq \varepsilon$.

Notons P_n la projection orthogonale sur H_n ; pour tout x, $P_n(x) \to x$.

On a aussi, puisque $\langle x_{\varphi(n)}, e_i\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout i, que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge faiblement vers 0, donc $\langle x_{\varphi(n)}, x\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout x.

Pour $z \in H$, on a alors
$$\begin{aligned}\langle y, z\rangle &= \lim_{n\to+\infty} \langle Tx_{\varphi(n)}, z\rangle \\ &= \lim_{n\to+\infty} \langle x_{\varphi(n)}, T^* z\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $y = 0$, ce qui est une contradiction : $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$.

On a $\|T_{|H_n^\perp}\| = \|T(\mathrm{id} - P_n)\|$, donc $\|TP_n - T\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Puisque P_n est de rang fini, TP_n l'est aussi □

Thm : Soit H un espace de Hilbert séparable, et $T \in K(H)$. Alors $T^* \in K(H)$

Rque : Ce résultat est vrai dans tout espace de Banach (l'adjoint d'un opérateur compact est un opérateur compact) mais la preuve est assez difficile.

Preuve : Si T_n est de rang fini alors T_n^* aussi (exercice) et $\|T - T_n\| = \|(T-T_n)^*\| = \|T^* - T_n^*\|$ □

Donc T^* est limite d'opérateurs de rang fini (donc compact)

A

Thm : Soit $T \in K(H)$

(i) Pour tout $\lambda \neq 0$ $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)$ est de dimension finie

(ii) Pour tout $\lambda \neq 0$ $\mathrm{Im}(T-\lambda I)$ est fermé, de codimension finie. (égale à $\dim(\mathrm{Ker}(T^*-\bar\lambda I))$)

Preuve : (i) Si $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)$ est de dimension infinie, sa boule unité B_λ fermée n'est pas compacte (Riesz).

Donc $T(B_\lambda) = \lambda B_\lambda$ n'est pas compact.

Mais λB_λ est un fermé contenu dans $T(B) \subset \overline{T(B)}$ n'est pas compact, impossible puisque $T \in K(H)$.

(ii) On a $\overline{\mathrm{Im}(T-\lambda I)} = \mathrm{Ker}((T-\lambda I)^*)^\perp = \mathrm{Ker}(T^*-\bar\lambda I)^\perp$.

Comme T^* est compact, $\mathrm{Ker}(T^*-\bar\lambda I)$ est de dimension finie ;

et $H = \mathrm{Ker}(T^*-\bar\lambda I) \oplus \mathrm{Ker}(T^*-\bar\lambda I)^\perp = \mathrm{Ker}(T^*-\bar\lambda I) \oplus \overline{\mathrm{Im}(T-\lambda I)}$.

Reste à montrer que $\mathrm{Im}(T-\lambda I)$ est fermé.

On a $H = \mathrm{Ker}(T-\lambda I) \oplus \underbrace{\mathrm{Ker}(T-\lambda I)^\perp}_{F}$; sur F, $T-\lambda I$ est injective.

Montrons qu'il existe $\delta > 0$ tq $\forall y \in F$ $\|(T-\lambda I)(y)\| \geq \delta \|y\|$.

Sinon, on peut trouver $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\begin{cases} \|y_n\| = 1 \\ \|(T-\lambda I)(y_n)\| \to 0 \end{cases}$

Comme T est compact, on peut trouver une sous-suite $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $T(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} z$.

On a $\lambda y_{\varphi(n)} - T(y_{\varphi(n)}) \to 0$, donc $\lambda y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} z$

De plus $\|y_{\varphi(n)}\| = 1$ pour tout n, donc $\|z\| = \lambda$.

On a donc : $z \in F$ (F est fermé) ; $\|z\| = \lambda$; $Tz = \lambda z$.

Cela contredit la définition de $F = \mathrm{Ker}(T-\lambda I)^\perp$.

Soit maintenant $x_n \in \mathrm{Im}(T-\lambda I)$ qui converge vers $x \in H$.

On peut écrire $x_n = (T-\lambda I)(y_n)$ avec $y_n \in F$ pour tout n.

$\forall n,m$ $\|y_n - y_m\| \leq \frac{1}{\delta} \|(T-\lambda I)(y_n) - (T-\lambda I)(y_m)\|$: $(y_n)_n$ est de Cauchy.

Donc $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} z \in F$, et
$$(T-\lambda I)(z) = \lim_{n\to+\infty} (T-\lambda I)(y_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

Donc $x \in \mathrm{Im}(T-\lambda I)$, qui est bien fermé par conséquent

□

<u>Def</u> : Pour $T \in K(H)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) on pose, pour $m \in \mathbb{N}$, $H_m^\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda I)^m$

On a vu que, si $\lambda \neq 0$, alors $H_1^\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda I)$ est de dimension finie.

De plus $H = H_1^\lambda \oplus (H_1^\lambda)^\perp$, et sur $(H_1^\lambda)^\perp$ $T - \lambda I$ et injective

Donc $\operatorname{Ker}(T-\lambda I) \subseteq H_1^\lambda + (T-\lambda I)^{-1}_{|H_1^{\lambda\perp}}(H_1^\lambda)$ est de dimension inferieure à $2 \dim(H_1^\lambda)$

<u>Exercice</u> : Mq. $\forall m \in \mathbb{N}$ $\dim(H_m^\lambda) \leq m \dim(H_1^\lambda)$.

En particulier, chaque H_m^λ est de dimension finie.

<u>Thm</u> : Soit $T \in K(H)$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
Alors $\exists m$ $\forall n \geq m$ $H_n^\lambda = H_m^\lambda$

<u>Preuve</u> : On doit trouver m tq $H_m^\lambda = H_{m+1}^\lambda$.

Si un tel m n'existe pas, on peut pour tout $m \geq 1$ trouver $e_m \in H_m^\lambda \cap (H_{m-1}^\lambda)^\perp$, avec $\|e_m\| = 1$.

Pour tout $m \geq 1$ on a $(T - \lambda I)(e_m) \in H_{m-1}^\lambda$, donc
$$T(e_m) = \lambda e_m + y_m \text{ avec } y_m \in H_{m-1}^\lambda$$

Si $n > m$, $T(e_n) - T(e_m) = \lambda e_n + \underbrace{y_n - \lambda e_m - y_m}_{\substack{\text{orthogonal à } e_n \\ (\text{car } \in H_{n-1}^\lambda)}}$

Donc $\|T(e_n) - T(e_m)\| \geq \lambda$ si $n > m$.

Ceci contredit la compacité de $\overline{T(B)}$ □

<u>Thm</u> : Soit $T \in K(H)$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Alors :

(i) λ est valeur propre de T ssi $\bar{\lambda}$ est valeur propre de T^*

(ii) $\dim(\operatorname{Ker}(T - \lambda I)) = \dim(\operatorname{Ker}(T^* - \bar{\lambda} I)) = \operatorname{codim}(\operatorname{Im}(T - \lambda I))$

<u>Preuve</u> : Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de T, alors $T - \lambda I$ n'est pas injective. Montrons que $T - \lambda I$ n'est pas non plus surjective.

Pour cela, considérons $H_\infty^\lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n^\lambda$, qui est de dimension finie.

Si $x \in H$ est tel que $(T - \lambda I)(x) \in H_\infty^\lambda$, alors il existe n tq $(T-\lambda I)(x) \in \operatorname{Ker}(T-\lambda I)^n$, donc $x \in \operatorname{Ker}(T-\lambda I)^{n+1} \subseteq H_\infty^\lambda$.

Par conséquent, $(T-\lambda I)^{-1}(H_\infty^\lambda) \subseteq H_\infty^\lambda$

H_∞^λ est de dimension finie, et $(T-\lambda I)_{|H_\infty^\lambda}$ n'est pas injective, donc pas surjective ; il existe donc $y \in H_\infty^\lambda \setminus \mathrm{Im}(T-\lambda I)_{|H_\infty^\lambda}$.

Donc $\mathrm{Im}(T-\lambda I) \neq H$; comme $\mathrm{Im}(T-\lambda I)$ est fermé,

$\mathrm{Im}(T-\lambda I)^\perp \neq \{0\}$, donc $\mathrm{Ker}(T^*-\bar\lambda I) = \mathrm{Im}(T-\lambda I)^\perp \neq \{0\}$

On conclut que $\bar\lambda$ est une valeur propre de T^*.

Pour montrer (ii), notons qu'on sait déjà que

$\dim(\mathrm{Ker}(T^*-\bar\lambda I)) = \mathrm{codim}\,(\mathrm{Im}(T-\lambda I))$.

Et $\underbrace{\dim(\mathrm{Im}(T-\lambda I)_{|H_\infty^\lambda})}_{\shortparallel} + \dim(\mathrm{Ker}(T-\lambda I)) = \dim(H_\infty^\lambda)$ (formule du rang)

$\dim(\mathrm{Im}(T-\lambda I) \cap H_\infty^\lambda) + \dim(\mathrm{Ker}(T-\lambda I)) = \dim(H_\infty^\lambda)$

Or, $\mathrm{codim}\,(\mathrm{Im}(T-\lambda I)) \geqslant \underset{\text{(calculée dans } H_\infty^\lambda)}{\mathrm{codim}}(\mathrm{Im}(T-\lambda I) \cap H_\infty^\lambda)$ (*)

Donc

$\mathrm{Codim}(\mathrm{Im}(T-\lambda I)) \geqslant \dim(\mathrm{Ker}(T-\lambda I))$

c-à-d

$\dim(\mathrm{Ker}(T^*-\bar\lambda I)) \geqslant \dim(\mathrm{Ker}(T-\lambda I))$

Comme $T = (T^*)^*$, on conclut en appliquant cette inégalité à T^* (qui appartient à $K(H)$) que $\dim(\mathrm{Ker}(T-\lambda I)) = \dim(\mathrm{Ker}(T^*-\bar\lambda I))$ □

<u>Revenons sur l'inégalité (*)</u> : Soit F_1, F_2 tels que

$\mathrm{Im}(T-\lambda I) \oplus^\perp F_1 = H$

$(\mathrm{Im}(T-\lambda I) \cap H_\infty^\lambda) \oplus^\perp F_2 = H_\infty^\lambda$.

Alors $H/_{\mathrm{Im}(T-\lambda I)} \simeq F_1$

Et $H_\infty^\lambda / _{\mathrm{Im}(T-\lambda I) \cap H_\infty^\lambda} \simeq F_2$.

De plus, $H_\infty^\lambda / _{\mathrm{Im}(T-\lambda I) \cap H_\infty^\lambda}$ est un sous-ev de $H/_{\mathrm{Im}(T-\lambda I)}$

Donc $\dim(F_2) \leq \dim(F_1)$, ce qu'affirmait (*).

Au cours de la preuve précédente, nous avons établi un résultat important : <u>l'alternative de Fredholm</u>.

Thm (alternative de Fredholm) : Soit $T \in K(H)$, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $T - \lambda I$ est injective

(ii) $T - \lambda I$ est surjective

(iii) $T - \lambda I$ est un isomorphisme.

En particulier, pour $\lambda \neq 0$ et $T \in K(H)$, $\lambda \in \sigma(T)$ ssi λ est une valeur propre de T.

Preuve : . si $T - \lambda I$ n'est pas injective, alors $T^* - \bar{\lambda} I$ non plus. (résultat précédent). Donc $\mathrm{Ker}(T^* - \bar{\lambda} I) \neq \{0\}$

Donc $\mathrm{Im}(T - \lambda I) = \mathrm{Ker}(T^* - \bar{\lambda} I)^\perp \neq H$: $T - \lambda I$ non surjective.

. Si $T - \lambda I$ n'est pas surjective, alors

$$\mathrm{Ker}(T^* - \bar{\lambda} I) = \underbrace{\mathrm{Im}(T - \lambda I)}_{\text{fermé}, \neq H}{}^{\perp} \neq \{0\}$$

Donc $\mathrm{Ker}(T^* - \bar{\lambda} I) \neq \{0\}$: $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de T^*, par conséquent λ est une valeur propre de T.

Ceci montre que (i) $\Leftrightarrow$ (ii). L'équivalence avec (iii) vient du fait qu'une bijection linéaire continue de H dans H est nécessairement d'inverse continu (puisque H est complet) $\square$

Thm : . Soit $T \in K(H)$, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. Alors il existe un unique sous-ev fermé F de H tel que $\begin{cases} T(F) \subseteq F \\ H = H_\infty^\lambda \oplus F \end{cases}$

. Si m est tel que $H_\infty^\lambda = H_m^\lambda$, on a $F = \mathrm{Im}(T - \lambda I)^m$.

Attention : la somme directe ci-dessus n'est pas orthogonale en général.

Preuve : Soit F fermé, T-invariant, tel que $H_\infty^\lambda \oplus F = H$

Alors $T - \lambda I : F \to F$ est injectif, et $T_{|F} \in K(F)$

D'après l'alternative de Fredholm, $T - \lambda I : F \to F$ est un isomorphisme.

Donc $F \subseteq \mathrm{Im}(T - \lambda I)^m$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Reste à montrer que, pour m suffisamment grand, on a $H_\infty^\lambda \oplus \mathrm{Im}(T - \lambda I)^m = H$.

Soit $m \geq 1$ tel que $H_\infty^\lambda = H_m^\lambda = \mathrm{Ker}\,(T-\lambda I)^m$.

On a $(T-\lambda I)^m = \underbrace{T^m - m\lambda T^{m-1} + \dots + m(-\lambda)^{m-1} T}_{\in K(H)} + \underbrace{(-\lambda)^m}_{\neq 0} I$

Donc $\mathrm{Im}\,(T-\lambda I)^m$ est fermé, de codimension égale à $\dim\,(\mathrm{Ker}(T-\lambda I)^m) = \dim\,(H_\infty^\lambda)$

Bien sûr $\mathrm{Im}(T-\lambda I)^m$ est T-stable ; pour conclure, il nous reste à établir que $\mathrm{Im}(T-\lambda I)^m \cap H_\infty^\lambda = \{0\}$

Soit $y \in \mathrm{Im}\,(T-\lambda I)^m \cap H_\infty^\lambda$.

Alors il existe x dans H_∞^λ tq $y = (T-\lambda I)^m(x) = 0$

(argument déjà vu... si $(T-\lambda I)(x) \in H_\infty^\lambda$ alors $x \in H_\infty^\lambda$)

Finalement, puisque H_∞^λ et $\mathrm{Im}\,(T-\lambda I)^m$ sont en somme directe et $\dim\,(H_\infty^\lambda) = \mathrm{codim}\,(\mathrm{Im}\,(T-\lambda I)^m)$, on conclut que

$$H_\infty^\lambda \oplus \mathrm{Im}\,(T-\lambda I)^m = H$$

$\square$

Thm : Soit H un espace de Hilbert séparable, de dimension infinie. Soit $T \in K(H)$.
Alors $\sigma(T)$ a l'une des deux formes suivantes :
(i) $\{0, \lambda_1, \dots \lambda_n\}$, où $\lambda_1, \dots \lambda_n$ sont des valeurs propres non nulles, de multiplicité finie
(ii) $\{0\} \cup \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ où $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de valeurs propres non nulles, toutes de multiplicité finie, qui converge vers 0.

Preuve : Soit λ un élément non nul de $\sigma(T)$. On a
$H = H_\infty^\lambda \oplus F$ avec F fermé, T-invariant
$T-\lambda I_{|F} : F \to F$ est un isomorphisme d'après l'alternative de Fredholm.

Il existe donc $r > 0$ tq pour tout μ avec $|\mu| < r$
$T - \lambda I - \mu I$ induise un isomorphisme de F.
Il suit que, pour tout μ avec $0 < |\mu| < r$, $\lambda + \mu$ n'est pas une valeur propre de F. Donc λ est un point isolé de $\sigma(F)$, qui est compact.
Cela implique qu'une suite convergente de $\sigma(T)$ est stationnaire ou converge vers 0 ; comme $0 \in \sigma(T)$, le spectre est d'une des deux forme ci-dessus (selon qu'il est fini ou infini) $\square$

D

Def : $T \in \mathcal{L}(H)$ est normal si : $T^*T = TT^*$
$T \in \mathcal{L}(H)$ est autoadjoint si $T^* = T$

Rque :
- Si T est autoadjoint alors T est normal
- Pour tout T, TT^* et T^*T sont autoadjoints.

Prop : Si $T \in \mathcal{L}(H)$ alors $\|T^*T\| = \|T\|^2$

Preuve : $\|T^*T\| \leq \|T^*\|.\|T\| = \|T\|^2$

Soit $x \in H$, $\|x\| \leq 1$. $\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x) \rangle = \langle T^*T(x), x \rangle$

Donc $\|T(x)\|^2 \leq \|T^*T\|.\|x\|^2 \leq \|T^*T\|$

En passant au sup : $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$ $\square$

Prop : Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ à la fois normal et compact.
Alors T admet un vecteur propre pour une valeur propre λ tq $|\lambda| = \|T\|$.

Preuve : Soit $U = T^*T$, $\lambda = \|U\| = \|T\|^2$. On suppose $\lambda \neq 0$.

Notons que U est compact et autoadjoint.

~~Par compacité de~~

Soit $(x_n)_n$ tq $\|x_n\| \leq 1$ et tq $\|T^*(x_n)\| \to \|T\|$

On extrait $(x_{\varphi(n)})_n$ tq $T^*(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$ (par compacité de T^*)

On a alors :

$$\|TT^*(x_{\varphi(n)}) - \lambda x_{\varphi(n)}\|^2 = \|TT^*(x_{\varphi(n)})\|^2 + \lambda^2\|x_{\varphi(n)}\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re}(\langle TT^*(x_{\varphi(n)}), x_{\varphi(n)}\rangle)$$

$$\leq \|TT^*\|^2 + \lambda^2 - 2\lambda \underbrace{\|T^*(x_{\varphi(n)})\|^2}_{\to \lambda}$$

Donc $TT^*(x_{\varphi(n)}) - \lambda x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc $\lambda x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} T(y)$

Puis $\lambda y = \lim\limits_{n\to+\infty} T^*(\lambda x_{\varphi(n)}) = T^*T(y)$.

De plus $\|y\| = \|T\| \neq 0$: y est un vecteur propre de T^*T pour la valeur propre $\lambda = \|T\|^2$.

Soit $F = \operatorname{Ker}(T^*T - \lambda I)$ de dimension finie ≥ 1
(par compacité de T^*T)

T et T^* commutent avec T^*T, donc stabilisent F.
Par conséquent $T_{|F}$ est un opérateur normal de l'espace de dimension finie F, et $T^*T_{|F} = \lambda\, \mathrm{id}_F$ Donc $\|T_{|F}\|^2 = \lambda$

Par le théorème spectral en dimension finie, $T_{|F}$ admet une valeur propre μ avec $|\mu| = \|T_{|F}\| = \sqrt{\lambda} = \|T\|$ $\square$

Théorème spectral pour les opérateurs normaux compacts :

Soit T un opérateur normal compact. Alors il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in I}$ formée de vecteurs propres de T.

(I fini si $\dim(H) < \infty$, $I = \mathbb{N}$ sinon)

Preuve : On suppose H de dimension infinie, sinon le résultat est déjà connu.

Pour $\lambda \in \sigma(T)$, notons H_λ le sous-espace propre associé à λ.

Si $x \in H_\lambda$ on a $T(T^*(x)) \underset{T \text{ normal}}{=} T^*T(x) = \lambda T^*(x)$: $T^*(x) \in H_\lambda$.

Donc T^* stabilise H_λ ; sur H_λ on a $T(x) = \lambda x$ et $T^*(x) = \bar{\lambda} x$.

Si $\lambda \neq \mu$ sont deux éléments de $\sigma(T)$, on a pour $x \in H_\lambda, y \in H_\mu$:

$$\lambda \langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^* y\rangle = \langle x, \bar{\mu} y\rangle = \mu \langle x, y\rangle$$

Donc $\langle x, y\rangle = 0$: les espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

~~Soit Fixons~~

$\sigma(T)$ est au plus dénombrable ; pour $\lambda \neq 0$ H_λ est de dimension finie.

Fixons $(f_i^\lambda)_{i\in I_\lambda}$ une base hilbertienne (de vecteurs propres !) de chaque H_λ

(si $\lambda \neq 0$ I_λ est fini, si jamais $0 \in \sigma(T)$ I_λ peut être infini dénombrable)

En réunissant tous les $(f_i^\lambda)_{\substack{\lambda\in\sigma(T)\\ i\in I_\lambda}}$ on obtient une famille dénombrable, qu'on peut énumérer sous la forme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui forme une base hilbertienne de l'espace vectoriel fermé engendré par les H_λ ; chaque e_n est un vecteur propre de T.

Il nous reste à justifier que $F = \mathrm{Vect}(\{H_\lambda : \lambda \in \sigma(T)\})$ est dense.

Si ce n'est pas le cas, $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de H, non trivial.

Comme F est $\left\{\begin{array}{l} T^*\text{-stable} \\ T\text{-stable}\end{array}\right.$ et T est normal, $F^\perp$ est T-stable et T^*-stable.

si $\left\{\begin{array}{l} x \in F \\ y \in F^\perp\end{array}\right.$ on a $\langle x, Ty\rangle = \langle T^* x, y\rangle = 0$

$\langle x, T^* y\rangle = \langle Tx, y\rangle = 0$

Donc T induit un opérateur normal compact de $F^\perp$, et y admet donc une valeur propre, ce qui est absurde puisque F contient tous les vecteurs propres de T. Donc $\bar{F} = H$.

$\square$