Quelques conséquences du théorème de Hahn-Banach

Déf: Soit E un evt localement convexe (et séparé, comme toujours)
Pour $A \subseteq E$ on note $A^{\perp} = \{\varphi \in E^* : \forall a \in A \ \varphi(A) = 0\}$

Thm: Soit E un espace vectoriel normé, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors:
$(F \text{ est dense dans } E) \iff (F^{\perp} = \{0\})$

Preuve: $\Rightarrow$ est à peu près immédiat

$\Leftarrow$: Supposons que F n'est pas dense ; soit $x \in E \setminus \overline{F}$.

Considérons $\varphi : \overline{F} \oplus \mathbb{K}x$ tq $\varphi(x) = 1$; $\varphi_{|F} = 0$; φ linéaire.

Notons $e = d(x, \overline{F}) > 0$, et soit $y \in \overline{F} \oplus \mathbb{R}x$. On peut écrire y sous la forme $y = f + \lambda x$ avec $f \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a alors : $|\varphi(y)| = |\lambda| = d(\lambda x_0, \overline{F}) \cdot \frac{1}{e} \leq \frac{\|\lambda x_0 + f\|}{e} = \frac{1}{e} \cdot \|y\|$.

Donc φ est continue sur $\overline{F} \oplus \mathbb{K}x$: par Hahn-Banach on peut prolonger φ en une forme linéaire continue $\tilde{\varphi}$ sur E.

On a alors $\tilde{\varphi} \neq 0$ puisque $\tilde{\varphi}(x) \neq 0$, et $\tilde{\varphi} \in F^{\perp}$ par déf. $\square$

Déf On note E^{**} le dual topologique de E^*, et on l'appelle bidual de E

Déf: L'application canonique $i : E \to E^{**}$ est définie par
$$\forall \varphi \in E^* \quad i(x)(\varphi) = \varphi(x)$$

Thm: (a) Supposons que E est un ev normé.
Alors $i : E \to E^{**}$ est injective

(b) Si E est un evn alors $i : E \to E^{**}$ est isométrique.

Preuve: (a) Si $x \neq y$ alors par Hahn-Banach il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) = 0$, $\varphi(y) = 1$. Donc $i(x)(\varphi) \neq i(y)(\varphi)$.

(b) Soit $x \in E$.

Par définition d'une norme duale, on a :

$$\|i(x)\| = \sup\{|i(x)(\varphi)| : \varphi \in E^*, \|\varphi\| = 1\}$$
$$= \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E^*, \|\varphi\| = 1\}$$
$$= \|x\| \quad \text{(corollaire de Hahn-Banach déjà vu)} \quad \square$$

Plus tard, on s'interrogera sur la surjectivité de l'injection canonique $i : E \to E^{**}$ quand E est un Banach.

<u>Def</u> : Soit E, F deux evn, et $f : E \to F$ linéaire.
La <u>transposée</u> de φ est l'application linéaire $f^* : F^* \to E^*$ définie par : $\forall \varphi \in F^* \; \forall x \in E \quad f^*(\varphi)(x) = \varphi(f(x))$

<u>Question / exercice</u> : Rapport avec la transposée d'une matrice ?

<u>Rque</u> : f^* est fréquemment appelé <u>l'adjoint</u> de f

<u>Thm</u> : Soit E, F deux espaces normés et $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$.
Alors $T^* \in \mathcal{L}_c(F^*, E^*)$ et $\|T^*\| = \|T\|$.

<u>Preuve</u> : Soit $\varphi \in F^*$; on a $\|T^*(\varphi)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T^*(\varphi)(x)\|$

Donc $\|T^*(\varphi)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\varphi(T(x)\| \leq \|\varphi\| . \|T\|$.

Ceci établit l'inégalité $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Pour l'inégalité réciproque, soit ($\varepsilon > 0$ et) x_0 tq $\|x_0\| = 1$ et $\|T(x_0)\| \geq \|T\| - \varepsilon$

Soit $\varphi \in F^*$ tel que $\|\varphi(T(x_0))\| = \|T(x_0)\|$ et $\|\varphi\| = 1$
(on a vu qu'un tel φ existe grâce à Hahn-Banach).

On a alors $\|T^*(\varphi)\| \geq \|\varphi(T(x_0))\| = \|T(x_0)\| \geq \|T\| - \varepsilon$

Donc $\|T^*\| \geq \|T^*(\varphi)\| \geq \|T\| - \varepsilon$, d'où $\|T^*\| \geq \|T\|$.

$\square$

<u>Ex</u> : Déterminer les relations entre $\mathrm{Im}(T)$, $\mathrm{Ker}(T)$, $\mathrm{Im}(T^*)$, $\mathrm{Ker}(T^*)$
(pour E, F evn et $T : E \to F$ linéaire continue)

<u>Ex</u> : Que dire de T^* si E, F sont complets et T est un isomorphisme ?)

Quelques mots sur l'axiome du choix.

Dans la preuve du théorème de Hahn-Banach, on a utilisé le lemme de Zorn, qui est un des avatars de l'axiome du choix.

Def : Soit X un ensemble, et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Une fonction de choix sur X est une fonction $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ telle que $\forall A \quad f(A) \in A$.

(C'est une fonction qui choisit dans chaque partie non vide de X un de ses éléments).

L'axiome du choix est l'énoncé suivant :

"Tout ensemble admet une fonction de choix"

De manière équivalente : si I est un ensemble, et A_i est un ensemble non vide pour tout $i \in I$, alors $\prod_{i \in I} A_i$ est non vide.

Pour voir que ces deux énoncés sont équivalents (exercice) :

$\Rightarrow$ Considérer $X = \bigcup_{i \in I} A_i$, et utiliser une fonction de choix sur X pour produire un élément de $\prod_{i \in I} A_i$

$\Leftarrow$ Un élément de $\prod_{A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}} A$ est une fonction de choix sur X.

Ex : Montrer que l'axiome du choix est équivalent à l'énoncé suivant : si $f : X \to Y$ est une surjection, alors il existe $g : Y \to X$ telle que : $\forall y \in Y \quad y = f(g(y))$

Vous avez fréquemment utilisé cet énoncé dans vos raisonnements !

L'axiome du choix a de nombreuses formes équivalentes, dont le lemme de Zorn et le théorème de Zermelo, sur lesquels on va revenir.

Il existe aussi pléthore d'énoncés affaiblissant l'axiome du choix ; en analyse on a surtout besoin de l'énoncé suivant, appelé axiome du choix dépendant : si X est un ensemble, et R est une relation binaire sur X telle que $\forall x \in X \ \exists y \in X \quad R(x,y)$, alors il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que :
$\forall n \in \mathbb{N} \quad R(x_n, x_{n+1})$

L'axiome du choix dépendant est suffisant pour démontrer la plupart des énoncés utilisés en analyse (par ex, le théorème de Baire), du moins quand on travaille avec des espaces séparables.

<u>Def</u> : Un ensemble partiellement ordonné $(X, \leq)$ est <u>inductif</u> si :

Toute sous partie $Y \subseteq X$ totalement ordonnée par $\leq$ admet un majorant.

<u>Lemme de Zorn</u> : Soit $(X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné inductif non vide. Alors $(X, \leq)$ admet (au moins) un <u>élément maximal</u> x_0, c.à.d tel que :
$\forall y \in X \quad x_0 \leq y \Rightarrow x_0 = y$.

<u>Def</u> : Un ordre $\leq$ sur un ensemble X est un <u>bon ordre</u> si toute partie non vide de X admet un plus petit élément.

<u>Théorème de Zermelo</u> : Tout ensemble peut être muni d'un bon ordre.

Un exemple fondamental d'ensemble bien ordonné est fourni par $\mathbb{N}$ muni de son ordre usuel ; c'est la base du principe de récurrence.

Pouvoir munir un ensemble X d'un bon ordre permet d'"énumérer" les éléments de X (d'abord le plus petit, puis le plus petit des autres, etc...)

<u>Fait</u> : $\boxed{\text{Axiome du choix} \Leftrightarrow \text{Lemme de Zorn} \Leftrightarrow \text{Théorème de Zermelo}}$

<u>Éléments de preuve</u> : <u>Zermelo $\Rightarrow$ Choix</u>. Soit X un ensemble, munissons-le d'un bon ordre $\leq$ (si c'est possible)

Alors $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(X)\setminus\{\emptyset\} \to X \\ A \mapsto \min(A) \end{array} \right.$ est une fonction de choix sur X.

<u>Zorn $\Rightarrow$ Zermelo</u> : On fixe un ensemble X non vide (tout ordre sur $\emptyset$ est un bon ordre...)

On considère $\Omega = \{(A, \leq) : A \subseteq X, \text{ et } \leq \text{ est un bon ordre sur } A\}$.

On ordonne Ω par une relation $\preceq$ en disant que :

$$(A, \leq) \preceq (A', \leq') \text{ si : } \left\{ \begin{array}{l} \cdot\ A \subseteq A' \\ \cdot\ \forall a, b \in A \quad (a \leq b) \Leftrightarrow (a \leq' b) \\ \cdot\ \forall a \in A\ \forall b \in A' \setminus A \quad a \leq' b. \end{array} \right.$$

(oublié au tableau !)

Alors Ω est non vide, $(\Omega, \preceq)$ est inductif (exercice !) et tout élément maximal de $(\Omega, \preceq)$ est de la forme $(X, \leq)$, où $\leq$ est un bon ordre sur X (re-exercice...)

Choix $\Rightarrow$ Zorn :

Supposons l'axiome du choix vérifié, et $(X, \leq)$ est un ensemble inductif (non vide) sans élément maximal.

Alors, pour toute partie $A \subseteq X$ totalement ordonnée par $\leq$ l'ensemble $\{x \in X : \forall a \in A \quad a < x\}$ est non vide.

Grâce à l'axiome du choix, on peut donc trouver une fonction f associant à toute partie A tq $(A, \leq)$ est totalement ordonné un élément $f(A)$ qui est un majorant strict de A.

On peut alors considérer l'ensemble des parties A de X telles que :

$$\begin{cases} \cdot\ (A, \leq) \text{ est bien ordonné} \\ \cdot\ \forall a \in A, \quad a = f(\{b \in A : b < a\}) \end{cases} \qquad (*)$$

Il s'agit ensuite de montrer (exercice pas immédiat !) que si A, B ont la propriété $(*)$ alors l'une des deux parties est égale à un segment initial de l'autre.

Mais alors, on voit que B, la réunion de tous les sous-ensembles avec $(*)$, a lui aussi $(*)$.

Mais $B \cup \{f(B)\}$ a $(*)$, et on aboutit à une contradiction $\square$

Exercice : À l'aide du lemme de Zorn, démontrer l'énoncé suivant : Soit $\mathbb{K}$ un corps, et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors E admet une base.

Par exemple, $\mathbb{R}$, vu comme $\mathbb{Q}$-ev, admet une base $(x_i)_{i \in I}$. Il n'est pas possible de construire explicitement une telle base...

Clairement, I est infini ($\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable) ; soit $f : \mathbb{N} \to I$ une injection (pourquoi en existe-t-il une ? N'utilise-t-on pas à nouveau un peu d'axiome du choix ?)

Considérons $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'unique application linéaire telle que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(x_{f(n)}) = n |x_{f(n)}| \\ \forall i \in I \setminus f(\mathbb{N}) \quad \varphi(x_i) = 0 \end{cases}$$

Alors $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application $\mathbb{Q}$-linéaire (en particulier, $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$) mais φ n'est pas continue (pourquoi ?)

(On verra plus tard un exercice selon lequel si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable et $\forall x, y \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ alors φ est continue)

L'axiome du choix est souvent considéré comme pathologique par exemple parce qu'il permet de construire des parties de $\mathbb{R}$ non (Lebesgue)-mesurables.

Exercice : Sur $\mathbb{R}$ on note $x \sim y$ si $\exists q \in \mathbb{Q}$ $x = y + q$.

On construit, avec l'axiome du choix, un sous-ensemble $V \subseteq [0,1]$ tel que :
- $\forall x \neq y \in V$, $x \not\sim y$
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists v \in V$ $x \sim v$.

Montrer que si V est mesurable alors $\lambda(V) = 0$, puis que $\lambda(\mathbb{R}) = 0$.

On va finir cette digression autour de l'axiome du choix en voyant que, si on suppose que toute partie de $\mathbb{R}$ est mesurable alors d'autres pathologies apparaissent.

(Ci-dessous, pour se simplifier la vie on utilisera l'axiome du choix dépendant qui n'est pas suffisant pour produire des ensembles non mesurables mais aide beaucoup pour faire de l'analyse, en particulier pour établir les propriétés de la mesure de Lebesgue...)

Lemme : Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie mesurable et telle que $\lambda(A) > 0$. Alors $A - A$ contient un voisinage de 0.

Preuve : "Rappelons" que pour toute partie $A \subseteq \mathbb{R}$ on a

$$\sup_{K \subseteq A,\, K \text{ compact}} \lambda(K) = \lambda(A) = \inf_{O \supseteq A,\, O \text{ ouvert}} \lambda(O).$$

On peut donc supposer A compact. Soit O un ouvert contenant A et tel que $\lambda(O) < 2\lambda(A)$.

Comme A est compact et $\mathbb{R} \setminus O$ est fermé, $d(A, \mathbb{R}\setminus O) = \varepsilon > 0$.
Soit $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Alors $\begin{cases} A \text{ et } A+t \text{ sont contenues dans } O \\ \lambda(A) = \lambda(A+t) \end{cases}$

Donc $A \cap (A+t) \neq \emptyset$, autrement dit $t \in A - A$ $\square$

Exercice : Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ alors φ est continue.

Lemme : Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie mesurable et $\mathbb{Q}$-invariante, i.e $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall q \in \mathbb{Q}$ $x \in A \iff x + q \in A$

Alors : soit $\lambda(A) = 0$, soit $\lambda(\mathbb{R} \setminus A) = 0$

Preuve. Notons que si $\lambda(A \cap [0,1]) = 0$ alors $A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (A+n)$ est de mesure nulle.

Soit $B = A \cap [0,1]$; on peut supposer $\lambda(B) > 0$, et il suffit de montrer qu'alors $\lambda(B) = 1$.

Soit $\alpha = \lambda(B)$; on commence par montrer que, pour tout intervalle J d'extrémités rationnelles, $\lambda(A \cap J) = \alpha \lambda(J)$. (3)

- C'est vrai pour $[0, p]$ $\forall p \in \mathbb{Z}$ (on découpe + translatés de $[0,1]$)
- En subdivisant en n intervalles de même longueur, c'est vrai pour $[0, \frac{p}{q}]$ $\forall p \in \mathbb{Z}$ $\forall q \in \mathbb{N}^*$.
- Une dernière translation nous donne le résultat annoncé.

Supposons maintenant que $0 < \alpha < 1$; il existe alors une suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'intervalles d'extrémités rationnelles et tq :

- $B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$,
- $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(J_n) < 1$.

On a alors : $\alpha = \lambda(B) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(A \cap J_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha \lambda(J_n) < \alpha$.

C'est une contradiction : on conclut que $\lambda(B) = 1$ □

Revenons à $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$; avec un peu de travail on peut construire une injection $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ (il y a beaucoup de classes d'équivalence ...)

On va maintenant montrer que, si toute partie de $\mathbb{R}$ est mesurable, alors il n'y a pas d'injection de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Autrement dit, "$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est strictement plus grand que $\mathbb{R}$", ce qui est tout de même légèrement perturbant...

<u>Thm</u> : Soit $\preceq$ un ordre total sur $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. On note $[x] = \{x + q : q \in \mathbb{Q}\}$.
$\{x \in \mathbb{R} : [x] \preceq [-x]\}$ n'est pas mesurable.

Si $\exists g : \mathbb{R}/\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ injective, alors $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ peut être muni d'un ordre total (comment ?) et il existe donc (par le théorème ci-dessus) une partie non mesurable de $\mathbb{R}$.

<u>Preuve</u> : Soit $A = \{x \in \mathbb{R} : [x] \preceq [-x]\}$.

- Si $q \in \mathbb{Q}$ alors $[q] = [-q]$ donc $\mathbb{Q} \subseteq A$
- A est $\mathbb{Q}$-invariant
- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors $[x] \neq [-x]$; donc $\begin{cases} x \in A \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \setminus A \\ x \in \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow -x \in A \end{cases}$

Donc $\underbrace{\lambda(A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))}_{= \lambda(A)} = \underbrace{\lambda((\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))}_{= \lambda(\mathbb{R} \setminus A)}$

C'est impossible, puisque A ou son complémentaire est négligeable □

Le théorème de Krein – Milman

On se place dans un espace vectoriel topologique X, que l'on suppose localement convexe (et séparé, comme tous les evt dans ce cours).

Étant donné $A \subseteq X$, on note $\operatorname{co}(A)$ l'enveloppe convexe de A, c'est-à-dire l'intersection de tous les convexes contenant A.

On note $\overline{\operatorname{co}}(A) = \overline{\operatorname{co}(A)}$ l'enveloppe convexe fermée de A (le plus petit convexe fermé contenant A).

<u>Def</u> : Soit $K \subseteq X$ un convexe. Un point $x \in K$ est dit être un <u>point extrémal</u> de K si : $\forall k_1, k_2 \in K$, $\forall t \in]0,1[$

$$t k_1 + (1-t) k_2 = x \implies k_1 = k_2 = x$$

Autrement dit : x n'est à l'intérieur d'aucun segment (non trivial) reliant deux éléments de K.

Ex : Quels sont les points extrémaux de $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$?
Et pour $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 1\}$? Et pour $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 1\}$?

<u>Théorème de Krein – Milman</u> :

Soit X un evt localement convexe, et $K \subseteq X$ un compact convexe.
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points extrémaux de K. Alors on a :

$$K = \overline{\operatorname{co}}(\mathcal{E})$$

("tout compact convexe est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux")

On se lance dans la preuve de ce théorème ; il faut déjà justifier que K admet des points extrémaux ! On suppose $K \neq \emptyset$:

<u>Def</u> : $F \subseteq K$ est une <u>face extrémale</u> si F est convexe, fermé, $\neq \emptyset$ et :

$$\forall x, y \in K \ \forall t \in]0,1[\quad t x + (1-t) y \in F \implies x \in F \text{ et } y \in F$$

Remarquons que si F est un singleton $\{x_0\}$ alors F est une face extrémale ssi x_0 est un point extrémal.

K est (tautologiquement !) une face extrémale de K, l'ensemble des faces extrémales de K est donc non vide.