Le théorème de Krein – Milman

On se place dans un espace vectoriel topologique X, que l'on suppose localement convexe (et séparé, comme tous les evt dans ce cours).

Étant donné $A \subseteq X$, on note $co(A)$ l'enveloppe convexe de A, c'est-à-dire l'intersection de tous les convexes contenant A.

On note $\overline{co}(A) = \overline{co(A)}$ l'enveloppe convexe fermée de A (le plus petit convexe fermé contenant A).

Déf : Soit $K \subseteq X$ un convexe. Un point $x \in K$ est dit être un point extrémal de K si : $\forall k_1, k_2 \in K$, $\forall t \in]0,1[$

$$t k_1 + (1-t) k_2 = x \implies k_1 = k_2 = x$$

Autrement dit : x n'est à l'intérieur d'aucun segment (non trivial) reliant deux éléments de K.

Ex : Quels sont les points extrémaux de $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$?
Et pour $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 1\}$? Et pour $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 1\}$?

Théorème de Krein – Milman :

Soit X un evt localement convexe, et $K \subseteq X$ un compact convexe.
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points extrémaux de K. Alors on a :

$$K = \overline{co}(\mathcal{E})$$

("tout compact convexe est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux")

On se lance dans la preuve de ce théorème ; il faut déjà justifier que K admet des points extrémaux ! On suppose $K \neq \emptyset$.

Déf : $F \subseteq K$ est une face extrémale si F est convexe, fermé, $\neq \emptyset$ et :

$$\forall x, y \in K \quad \forall t \in]0,1[\quad tx + (1-t)y \in F \implies x \in F \text{ et } y \in F$$

Remarquons que si F est un singleton $\{x_0\}$ alors F est une face extrémale ssi x_0 est un point extrémal.

K est (tautologiquement !) une face extrémale de K, l'ensemble des faces extrémales de K est donc non vide.

Soit Ω l'ensemble des faces extrémales de K.

On ordonne Ω en posant $(F_1 \leq F_2) \Leftrightarrow (F_2 \subseteq F_1)$.

<u>Montrons que $(\Omega, \leq)$ est un ensemble inductif</u> : soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de faces totalement ordonnée par $\leq$

(autrement dit : $\forall i, j$ $F_i \leq F_j$ ou $F_j \leq F_i$).

Soit $F = \bigcap_{i \in I} F_i$. Alors F est convexe et fermé ; et pour tout $A \subseteq I$ fini, $\bigcap_{i \in A} F_i$ est non vide (c'est un des F_i) donc, comme K est compact, F est non vide.

Reste à montrer que F est extrémal : soit $x, y \in K$, $t \in]0,1[$ tels que $tx + (1-t)y \in F$.

Alors $\forall i \in I$ $tx + (1-t)y \in F_i$, donc $x, y \in F_i$, puis $x, y \in F$.

Finalement, F est une face extrémale, contenue dans chacun des F_i, ce qui prouve comme annoncé que $(\Omega, \leq)$ est inductif.

Soit F une face extrémale minimale pour l'inclusion (Zorn !)

<u>Montrons que F est un singleton.</u>

Supposons que $\exists x \neq y \in F$, et soit $\varphi : X \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue telle que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ (Hahn-Banach !)

Soit $M = \max\{\varphi(x) : x \in F\}$, et $C = \{x \in F : \varphi(x) = M\}$.

Alors C est convexe, fermé, non vide (F est fermé dans K, donc compact).

De plus, C est une face extrémale de F, et donc (pourquoi ?) de K.

Mais $C \neq F$ (x ou y n'est pas dans C), contredisant la minimalité de F.

Donc F est un singleton : <u>il existe un point extrémal dans K.</u>

Considérons maintenant $L = \overline{co}(\mathcal{E})$, où $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points extrémaux de K. Alors L est compact, convexe.

<u>On souhaite montrer que $L = K$</u> ; par l'absurde, supposons $L \neq K$.

Soit $x \in K \setminus L$ et φ une forme linéaire continue telle que

$\sup_{y \in L} \varphi(y) < \varphi(x)$ (Hahn-Banach) ; soit $M = \max\{\varphi(k) : k \in K\}$

Comme précédemment, M est une face extrémale de K, et contient (par le même raisonnement que ci-dessus) un point extrémal e. On a alors $e \in L$ et $\varphi(e) \geq \varphi(x)$, une contradiction.

Finalement, $L = K$ et le théorème de Krein-Milman est démontré $\square$

Exercice (pour les afficionados du théorème de Baire)

Soit K un compact convexe métrisable dans un espace vectoriel topologique. Alors l'ensemble des points extrémaux est G_δ dans K.

(Indication : On fixe une distance d sur K, puis on considère, pour $q \in \mathbb{Q}_+^*$, l'ensemble F_q suivant :

$$F_q = \{ x \in K : \exists\, y, z \in K \text{ tq } x = \frac{y+z}{2} \text{ et } d(y,z) \geq q \}$$

Montrer que F_q est fermé, et conclure.)

Topologies faibles

Dans ce chapitre, X est un espace de Banach (par simplifier un peu...)

Étant donné un espace topologique Y, et une famille $\mathcal{F}$ de fonctions de X dans Y, il existe toujours une topologie la plus grossière parmi celles qui rendent chaque élément de $\mathcal{F}$ continu.

On appelle cette topologie la <u>topologie induite</u> par $\mathcal{F}$ sur X ; je la noterai $\sigma(X, \mathcal{F})$.

Si $Y = \mathbb{R}$ et $x_0 \in X$, une base de voisinages (de x_0) pour $\sigma(X, \mathcal{F})$ est donnée par les parties de la forme :

$$V_{A,\varepsilon,x} = \{ y \in X : \forall f \in A \ |f(x_0) - f(y)| < \varepsilon \}, \text{ avec } \begin{cases} \varepsilon > 0 \\ A \subseteq \mathcal{F} \text{ finie.} \end{cases}$$

On va utiliser cette notion pour $\mathcal{F}$ un <u>espace vectoriel</u> de formes linéaires de X dans $\mathbb{R}$.

<u>Prop</u> : On suppose que $\mathcal{F}$ est un sous-ev de X^*, qui sépare les points. Alors :

(a) $(X, \sigma(X, \mathcal{F}))$ est un evt localement convexe (et séparé)

(b) $(X, \sigma(X, \mathcal{F}))^* = \mathcal{F}$.

(c) Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$ si, et seulement si, $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{F}$.

<u>Preuve</u> : (a) Chaque $V_{A,\varepsilon,x}$ défini ci-dessus est convexe ; la séparation est une conséquence du fait que $\mathcal{F}$ sépare les points : soit $x \in X \setminus \{0\}$ et $\varphi \in \mathcal{F}$ tq $\varphi(x) = 1$.

Alors soit $V = \{ y : |\varphi(x)| < \frac{1}{2} \}$, $W = \{ y : |\varphi(x) - 1| < \frac{1}{2} \}$

V et W sont ouverts, disjoints ; $0 \in V$; $x \in W$.

Le fait que $(x, x') \mapsto x + x'$ et $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ sont continues suit rapidement des définitions et est laissé en exercice.

(b) Par définition, on a $\mathcal{F} \subseteq (X, \sigma(X, \mathcal{F}))^*$.

Soit $\psi \in (X, \sigma(X, \mathcal{F}))^*$. Comme ψ est continue en 0, il existe $\varepsilon > 0$, $f_1 \ldots f_n \in \mathcal{F}$ telles que :

$$\forall x \ \left(\forall i \in \{1, \ldots, n\} \ |f_i(x)| < \varepsilon \Rightarrow |\psi(x)| < 1 \right)$$

En particulier, pour tout x on a :

$(\forall i \in \{1, \dots, n\}\ f_i(x) = 0) \Rightarrow |\varphi(x)| < 1$, donc

$(\forall i \in \{1, \dots, n\}\ f_i(x) = 0) \Rightarrow \varphi(x) = 0$.

Ceci entraîne que $\varphi \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n)$ (cf feuille exercices 5)

Donc $\varphi \in \mathcal{F}$, comme annoncé.

(c) Si $x_n \xrightarrow{\sigma(X,\mathcal{F})} x$ alors pour tout $f \in \mathcal{F}$, $\varepsilon > 0$ il existe N tq $n \geq N \Rightarrow x_n \in V_{f,\varepsilon,x} = \{y : |f(y) - f(x)| < \varepsilon\}$,

donc $f(x_n) \to f(x)$.

Réciproquement, $(f(x_n) \to f(x)\ \forall f \in \mathcal{F})$ revient à dire que pour tout $A \subseteq \mathcal{F}$ fini et tout $\varepsilon > 0$ il existe N tq $n \geq N \Rightarrow x_n \in V_{A,\varepsilon,x}$. Donc $x_n \xrightarrow{\sigma(X,\mathcal{F})} x$.

$\square$

<u>Def</u> : Pour $\mathcal{F} = X^*$ on obtient la <u>topologie faible</u> $\sigma(X, X^*)$ sur X

<u>Def</u> : Soit X un Banach et X^* son dual. La <u>topologie faible-*</u> sur X^* est $\sigma(X^*, i(X))$, où $i : X \to X^{**}$ désigne l'injection canonique de X dans son bidual.

<u>Attention</u> : sur X^*, la topologie faible-* est plus grossière que la topologie faible, puisque $i(X) \subseteq X^{**}$ et il arrive que $i(X)$ soit strictement inclus dans X^{**} !

Le dual de $(X^*, \sigma(X^*, i(X)))$ est $i(X)$ (c'est-à-dire X) alors que le dual de $(X^*, \sigma(X^*, X^{**}))$ est X^{**}.

Souvent, on écrit $\sigma(X^*, X)$ plutôt que $\sigma(X^*, i(X))$ (on identifie X à $i(X)$...)

<u>Rque</u> : Supposons que X est de dimension infinie ; soit V un voisinage de 0 pour $\sigma(X, \mathcal{F})$, où $\mathcal{F}$ est un sous-ev de X^* qui sépare les points.

Alors V contient un ensemble de la forme $\{x : \forall f \in A\ |f(x)| < \varepsilon\}$, avec $A \subseteq \mathcal{F}$ fini, $\varepsilon > 0$.

Donc V contient $\bigcap_{f \in A} \mathrm{Ker}(f)$, qui est un sous-espace vectoriel de X de codimension finie.

Donc : en dimension infinie, tout voisinage de 0 pour une topologie faible contient un sous-espace vectoriel de dimension infinie !

Thm : Soit C un convexe de X. L'adhérence de C pour $\sigma(X,X^*)$ coïncide avec l'adhérence de C pour la norme de X.

En particulier, un convexe est fermé en norme si, et seulement si, il est fermé pour la topologie faible-$*$.

Preuve : • Comme $\sigma(X,X^*)$ a moins d'ouverts que $\|.\|$, on a $\overline{C}^{\|.\|} \subseteq \overline{C}^{\sigma(X,X^*)}$

• Soit $x \in X \setminus \overline{C}^{\|.\|}$. Par Hahn-Banach, il existe $\varphi \in X^*$ telle que $\sup\limits_{y \in C} \varphi(y) < \varphi(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$ tq $\varphi(x) - \varepsilon > \varphi(y)$ pour tout $y \in C$.

Alors $V_{\varphi,\varepsilon,x}$ est un ouvert de $\sigma(X,X^*)$ qui contient x et est d'intersection vide avec C : $x \notin \overline{C}^{\sigma(X,X^*)}$ □

Thm : Soit X, Y deux espaces de Banach et $f : X \to Y$ linéaire. Alors f est continue de $(X,\|.\|)$ vers $(Y,\|.\|)$ si, et seulement si, f est continue de $(X,\sigma(X,X^*))$ vers $(Y,\sigma(Y,Y^*))$

Preuve : Notons que (plus ou moins par définition d'une topologie initiale, exercice !) si Z est un espace topologique, $g : Z \to (Y,\sigma(Y,Y^*))$ est continue ssi $\forall \varphi \in Y^*$ $\varphi\circ g : Z \to \mathbb{R}$ est continue.

Donc, si f est linéaire, $f : (X,\sigma(X,X^*)) \to (Y,\sigma(Y,Y^*))$ est continue ssi $\varphi\circ f : (X,\sigma(X,X^*)) \to \mathbb{R}$ est C^0, $\forall \varphi \in Y^*$.

Si f est (linéaire) continue de $(X,\|.\|) \to (Y,\|.\|)$ et $\varphi \in Y^*$ alors $\varphi\circ f \in X^*$, donc $\varphi \circ f$ est continue pour $\sigma(X,X^*)$.

Ceci nous donne une des deux implications attendues.

Supposons maintenant f linéaire continue de $(X,\sigma(X,X^*)) \to (Y,\sigma(Y,Y^*))$

Alors le graphe Γ_f de f est fermé dans $(X\times Y, \sigma(X,X^*)\times\sigma(Y,Y^*))$, où $\sigma(X,X^*)\times\sigma(Y,Y^*)$ est la topologie produit, i.e. la topologie engendrée par les $U\times V$, U ouvert de $(X,\sigma(X,X^*))$, V ouvert de $(Y,\sigma(Y,Y^*))$.

Mais $(X\times Y)^* = X^*\times Y^*$ et $\sigma(X,X^*)\times\sigma(Y,Y^*) = \sigma(X\times Y,(X\times Y)^*)$

Donc Γ_f est fermé dans $(X\times Y, \sigma(X\times Y,(X\times Y)^*))$.

Il suit de tout cela que Γ_f est fermé dans $(X \times Y, \|.\|)$, où $\|.\|$ est une norme produit sur $X \times Y$.

Par le théorème du graphe fermé, on obtient enfin que $f : (X, \|.\|) \to (Y, \|.\|)$ est continue.

$\square$

On voit donc que, même si on a beaucoup moins d'ouverts quand on passe aux topologies faibles, on a gardé les mêmes applications linéaires continues.

On verra bientôt ce qu'on a gagné : de la compacité, grâce au slogan "Moins d'ouverts = plus de compacts"...

Prop : Soit X un espace de Banach de dimension infinie. Soit B la boule unité fermée, et S la sphère unité.

L'adhérence de S pour $\sigma(X, X^*)$ est égale à B.

Preuve : B est convexe et $\|.\|$-fermé, donc $\sigma(X, X^*)$-fermé.

Donc $\overline{S}^{\sigma(X,X^*)} \subseteq B$.

Réciproquement, soit $x \in B$ et $\mathcal{O}$ un ouvert contenant x ; il existe $A \subseteq X^*$ finie et $\varepsilon > 0$ tels que $V_{A,\varepsilon,x} \subseteq \mathcal{O}$, avec

$$V_{A,\varepsilon,x} = \{ y : \forall \varphi \in A \ |\varphi(y) - \varphi(x)| \leq \varepsilon \}$$

Comme X est de dimension infinie, il existe $z \neq 0$ tel que $\forall \varphi \in A \quad \varphi(z) = 0$.

Alors on a $z(t) = x + tz \in V_{A,\varepsilon,x}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

En 0 on a $\|z(t)\| = \|x\| \leq 1$, et $\|z(t)\| \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.

Il existe donc t tel que $z(t) \in S$: $S \cap V_{A,\varepsilon,x} \neq \emptyset$ $\square$

Thm : Si X est de dimension infinie, alors il n'existe pas de distance d sur X dont l'ensemble des ouverts est $\sigma(X, X^*)$

(On dit que $\sigma(X, X^*)$ n'est pas métrisable)

Preuve : Si $\sigma(X, X^*)$ est métrisable, alors il existe une famille dénombrable $(\mathcal{O}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui forme une base de voisinages de 0 dans $\sigma(X, X^*)$

(i.e tout ouvert de $\sigma(X, X^*)$ qui contient 0 contient un des $\mathcal{O}_n$)

Pour tout n, il existe $A_n \subseteq X^*$ finie et $\varepsilon_n > 0$ tel que

$$V_{A_n, \varepsilon_n, 0} = \{ x \in X : |\varphi(x)| < \varepsilon_n \ \forall \varphi \in A_n \} \subseteq O_n .$$

Soit $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, qui est dénombrable ; soit $f \in X^*$.

$\{x \in X : |f(x)| < 1\}$ est un voisinage ouvert de 0 pour $\sigma(X, X^*)$, et contient donc un des A_n.

On a en particulier : $\forall x \ (\forall \varphi \in A_n \ \varphi(x) = 0) \Rightarrow (f(x) = 0)$

Ceci entraîne que $f \in \mathrm{Vect}(A_n)$. Donc $\mathrm{Vect}(A) = X^*$

On vient de trouver une famille dénombrable qui engendre X^*, ce qui est impossible puisque X^* est de dimension infinie, et X^* est complet pour la norme subordonnée. $\square$

Thm : Supposons que Φ est un sous-espace vectoriel séparable de X^*. Alors la boule unité de X est métrisable pour $\sigma(X, \Phi)$.

En particulier : • X^* séparable $\Rightarrow (B_X, \sigma(X, X^*))$ est métrisable

• X séparable $\Rightarrow (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ est métrisable.

Preuve : Soit $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sous-ensemble dénombrable dense de Φ.

Pour $x, y \in X$ on pose $d(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \cdot \min(|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)|, 1)$.

Alors d est une distance sur X, et la topologie induite par d est plus grossière ($=$ a moins d'ouverts) que $\sigma(X, \Phi)$.

En effet, si $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, on peut trouver N tel que

$\sum_{n=N+1}^{+\infty} 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$; $W = \{ y : \sum_{n=0}^{N} |\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \}$ est $\sigma(X, \Phi)$-ouvert (et contient x).

On a $y \in W \Rightarrow d(x,y) < \varepsilon$. Donc $B_d(x, \varepsilon)$ est $\sigma(X, \Phi)$-ouvert.

Montrons que sur B_X la topologie induite par d coïncide avec $\sigma(X, \Phi)$.

Soit V un ouvert de $(B_X, \sigma(X, \Phi))$ et soit $x \in V$.

Il existe $\psi_1, \dots, \psi_K \in \Phi$ et $\varepsilon > 0$ tq :

$$\forall y \in B_X \quad (\forall i \in \{1, \dots, K\} \ |\psi_i(x) - \psi_i(y)| < \varepsilon) \Rightarrow y \in V.$$

On peut trouver $\varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_n}$ tq $\|\psi_i - \varphi_{k_i}\| < \frac{\varepsilon}{4}$ pour tout i.