Notons que si $\begin{cases} \forall i \in \{1,\dots,n\} & |\varphi_{k_i}(x) - \varphi_{k_i}(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ y \in B \end{cases}$ alors $y \in V$.

En effet, on a alors : (pour $i \in \{1,\dots,n\}$)

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| \leq \underbrace{|\varphi_i(x) - \varphi_{k_i}(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{4}\|x\|} + \underbrace{|\varphi_{k_i}(x) - \varphi_{k_i}(y)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|\varphi_{k_i}(y) - \varphi_i(y)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{4}\|y\|}$$

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| < \varepsilon .$$

· Notons $N = \max(k_1, \dots, k_n)$. Par définition de d, on a :

$$\forall j \leq N \quad \min(|\varphi_j(x) - \varphi_j(y)|, 1) \leq 2^N d(x,y).$$

En particulier, si on suppose (ce qui ne change rien) $\varepsilon < 1$, on a :

$$\forall y \in B \;\; d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^N} \Rightarrow \forall i \in \{1\dots n\} \; \min(|\varphi_{k_i}(x) - \varphi_{k_i}(y)|, 1) < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,n\} \quad |\varphi_{k_i}(x) - \varphi_{k_i}(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Rightarrow y \in V.$$

On a fini : $B_d(x, \frac{\varepsilon}{2^{N+1}}) \subseteq V \cap B$ □

<u>Théorème de Banach-Alaoglu</u> :

> Soit X un espace de Banach. Alors la boule unité fermée B_{X^*} de X^* est compacte pour la topologie faible-* $\sigma(X^*, X)$.

<u>Rqe</u> : En particulier, B_{X^*} est donc $\sigma(X^*, X)$-fermée.

<u>Preuve</u> : Considérons $F : \begin{cases} X^* \to \mathbb{R}^X \\ \varphi \mapsto (\varphi(x))_{x\in X} \end{cases}$ (on traite le cas réel ; cas complexe similaire)

C'est un homéomorphisme sur son image, par définition de la topologie produit.

De plus, $F(X^*)$ est contenu dans l'espace des applications linéaires de X dans $\mathbb{R}$; si on note cet ensemble L, on a (en voyant L comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^X$) :

$$L = \bigcap_{\substack{\lambda \in \mathbb{R} \\ x,y \in X}} \{ f : f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) \}, \text{ qui est fermé}$$

comme intersection de fermés.

De plus, $F(B_{X^*}) = L \cap \prod_{x \in X} [-\|x\|, \|x\|]$.

En effet, l'inclusion de gauche à droite est immédiate ; et si φ est linéaire et satisfait $\varphi(x) \in [-\|x\|, \|x\|]$ pour tout $x \in X$, alors φ est continue et $\|\varphi\| \leq 1$, autrement dit $\varphi \in B_{X^*}$.

Le théorème de Tychonov assure que $\prod_{x \in X} [-\|x\|, \|x\|]$ est compact.

Donc $F(B_{X^*})$ est compact, en tant que fermé dans un compact.

Puisque F est un homéomorphisme, $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ est compact. □

<u>Def</u>: Soit X un espace de Banach, et $i : X \to X^{**}$ l'injection canonique, définie par : $\forall \varphi \in X^*$ $i(x)(\varphi) = \varphi(x)$.
On dit que X est <u>réflexif</u> si $i(X) = X^{**}$

Par exemple, tout espace de dimension finie est réflexif (pourquoi ?) ; on verra bientôt que ℓ^p est réflexif ssi $1 < p < +\infty$.

<u>Exemple</u>: Soit H un espace de Hilbert. Alors H est réflexif.

<u>Preuve</u>: Traitons le cas réel (cas complexe en exercice !)

Par le théorème de Riesz, pour tout $\varphi \in H^*$ il existe un unique $x \in X$ tel que $\forall y \in H$ $\varphi(y) = \langle x, y \rangle$.

L'application $\Phi : \begin{cases} H \to H^* \\ x \mapsto (y \mapsto \langle x, y \rangle) \end{cases}$ est donc un isomorphisme linéaire (isométrique)

On peut donc munir H^* d'un produit scalaire, en posant $\forall x, y \in H$ $\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

On applique de nouveau le théorème de Riesz :

$\forall f \in H^{**}$, $\exists x \in H$ tq : $\forall \varphi \in H^*$, $f(\varphi) = \langle \Phi(x), \varphi \rangle$

Autrement dit : $\forall \varphi \in H^*$ $f(\varphi) = \varphi(x) = i(x)(\varphi)$ □

Clairement, X est réflexif ssi $i(B_X) = B_{X^{**}}$ (on a vu grâce à Hahn-Banach que i est isométrique, donc on a toujours $i(B_X) \subset B_{X^{**}}$).

Lemme de Goldstine :

Soit X un espace de Banach. $\overline{i(B_X)}^{\sigma(X^{**},X^*)} = B_{X^{**}}$

Preuve : D'après Banach-Alaoglu $B_{X^{**}}$ est $\sigma(X^{**},X^*)$-compact, donc fermé.

Par conséquent, on a $\overline{i(B_X)}^{\sigma(X^{**},X^*)} \subseteq B_{X^{**}}$

Pour montrer l'inclusion réciproque, fixons $\Phi \in B_{X^{**}} \setminus \overline{i(B_X)}^{\sigma(X^{*},X^*)}$

Puisque $\overline{i(B_X)}^{\sigma(X^{**},X^*)}$ est fermé et convexe, le thm de Hahn-Banach appliqué dans l'evt $(X^{**}, \sigma(X^{**},X^*))$ nous donne l'existence de $f \in X^*$ telle que :

$$\begin{cases} \cdot \sup \{ \hat{i}(x)(f) : x \in B_X \} < 1 \\ \cdot \Phi(f) = 1 \end{cases}$$

La première ligne ci-dessus revient à écrire $\sup\{f(x) : x \in B_X\} < 1$, par conséquent $\|f\| < 1$.

Mais alors, la deuxième ligne implique $\|\Phi\| > 1$, une contradiction □

Théorème : Soit X un espace de Banach. Alors X est réflexif si, et seulement si, $(B_X, \sigma(X,X^*))$ est compact.

Preuve : Si X est réflexif alors on a : ~~B_X $i(B_X)$~~

$i : (B_X, \sigma(X,X^*)) \longrightarrow (i(B_X), \sigma(X^{**},X^*))$ est un homéomorphisme (c'est toujours vrai, par déf)

et $(i(B_X), \sigma(X^{**},X^*))$ est compact par Banach-Alaoglu.

Donc X réflexif $\Longrightarrow$ B_X faiblement compact.

Réciproquement, supposons B_X faiblement compact ; alors $(i(B_X), \sigma(X^{**},X^*))$ est compact, donc fermé.

Le lemme de Goldstine nous permet alors de conclure que $i(B_X) = B_{X^{**}}$: X est réflexif.

□

Thm : Soit X un espace de Banach réflexif, et Y un sous-ev fermé de X. Alors Y est réflexif.

Preuve : $B_Y \subseteq B_X$, et (puisqu'on peut prolonger les applications linéaires continues grâce à Hahn-Banach) la topologie faible $\sigma(Y, Y^*)$ est la topologie induite sur Y par $\sigma(X, X^*)$.

De plus, B_Y est convexe, et fermé en norme ; par conséquent B_Y est faiblement fermé.

Donc $(B_Y, \sigma(Y, Y^*))$ est compact en tant que fermé dans le compact $(B_X, \sigma(X, X^*))$.

□

Thm : Soit X un espace de Banach. Alors :

(X est réflexif) $\Longleftrightarrow$ (X^* est réflexif).

Preuve : . Supposons X réflexif.

Alors $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X^{**})) = (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ est compact par Banach-Alaoglu. Donc X^* est réflexif.

- Si X^* est réflexif, alors X^{**} aussi par ce qui précède, donc $i(X) \subseteq X^{**}$ est réflexif en tant que sous-espace vectoriel fermé de X^{**}.

Par conséquent X est réflexif.

□

Exercice : (1) Expliquer pourquoi $i(X)$ est fermé dans X^{**}.

(2) Justifier le fait suivant, implicitement utilisé plus haut : si Y, Z sont deux Banach linéairement isométriques, alors (Y est réflexif) $\Longleftrightarrow$ (Z est réflexif)

(3) Améliorer le résultat de (2) : soit Y, Z deux espaces de Banach et $\Phi : Y \to Z$ un isomorphisme linéaire. Montrer que (Y est réflexif) $\Longleftrightarrow$ (Z est réflexif).

(On pourra considérer $\Phi^{**} : Y^{**} \to Z^{**}$, et montrer / utiliser que $\Phi^{**} \circ i_Y = i_Z \circ \Phi$)

Prop : Soit X un espace de Banach réflexif, et C une partie de X convexe, fermée, et bornée. Alors C est faiblement compacte.

Preuve : C est convexe et fermée, donc faiblement fermé.

Comme C est borné, il existe R tel que $C \subseteq R \cdot B_X$, qui est faiblement compact.

Par conséquent, C est faiblement compact.

□