Prop: Soit X un espace de Banach réflexif, et C une partie de X convexe et fermée.

Pour tout $x \in X$ il existe $y \in C$ tel que $d(x, C) = \|x - y\|$.

Preuve: Fixons $x \in X$; soit $r = d(x, C)$. Fixons $R > r$.

Alors $C \cap \overline{B}(x, R)$ est convexe, fermé, borné, donc faiblement compact puisque X est réflexif.

Par définition d'un inf, il existe $y_n \in C \cap \overline{B}(x, R)$ telle que $\|x - y_n\| \to r$.

Comme C est faiblement compact, $(y_n)_n$ admet une sous-suite qui converge faiblement (cf. thm d'Eberlein-Smulian vu en TD).

Notons cette suite $(y_{\varphi(n)})$, et sa limite $y \in C$.

Comme $y_{\varphi(n)} - x \xrightarrow{\sigma(X, X^*)} y - x$ on a

$$\|y - x\| \leq \liminf_{n \to +\infty} \|y_{\varphi(n)} - x\| \quad \text{(aussi vu en TD)}$$

Donc $\|y - x\| \leq r$, par conséquent $\|y - x\| = r$ puisque $y \in C$. $\square$

Def: Un espace de Banach est uniformément convexe si :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
$$\forall x, y \in B_X \quad \|x - y\| > \varepsilon \implies \left\|\frac{x + y}{2}\right\| < 1 - \delta$$

Exercice : Montrer que tout espace de Hilbert est uniformément convexe.

Thm : Soit X un espace de Banach uniformément convexe. Alors X est réflexif.

Preuve: On va montrer que $i(B_X)$ est dense dans $B_{X^{**}}$ (en norme).

Comme i est une isométrie et B_X est complète (fermée dans X, qui est complet), on obtiendra $i(B_X) = B_{X^{**}}$.

Fixons $\varepsilon > 0$, puis trouvons δ témoignant de la convexité uniforme de B_X.

Soit $\theta \in X^{**}$ tel que $\|\theta\| = 1$.

Trouvons $f \in B_{X^*}$ tel que $\Theta(f) > 1 - \frac{\delta}{2}$.

Soit $V = \{ z \in X^{**} : |z(f) - \Theta(f)| < \frac{\delta}{2} \}$, qui contient Θ.

C'est un ouvert de $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$; le lemme de Goldstine nous garantit donc l'existence de $x \in i(X) \cap V$.

On a donc $|f(x) - \Theta(f)| < \frac{\delta}{2}$.

Montrons que $\| i(x) - \Theta \| \leq \varepsilon$:

Si ce n'est pas le cas, $i(x) + \varepsilon B_{X^{**}}$ est un fermé de $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$ qui ne contient pas Θ. Donc $V \setminus (i(x) + \varepsilon B_{X^{**}})$ est un voisinage ouvert de Θ pour $\sigma(X^{**}, X^*)$.

À nouveau grâce au lemme de Goldstine, on trouve $y \in B_X$ tel que $i(y) \in V \setminus (i(x) + \varepsilon B_{X^{**}})$.

On a alors : $\begin{cases} f(x) > \Theta(f) - \frac{\delta}{2} > 1 - \delta \\ f(y) > \Theta(f) - \frac{\delta}{2} > 1 - \delta \end{cases}$

Donc $f\left(\frac{x+y}{2}\right) > 1 - \delta$; par conséquent $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| > 1 - \delta$ (puisque $\|f\| = 1$).

Mais alors on doit avoir $\|x - y\| \leq \varepsilon$; or on avait garanti que $i(y) \notin i(x) + \varepsilon B_{X^{**}}$, c.-à-d. $\|i(x) - i(y)\| (= \|x - y\|) > \varepsilon$.

On vient d'aboutir à une contradiction ; par conséquent $\|i(x) - \Theta\| \leq \varepsilon$.

On vient de montrer que $\{ \Theta \in X^{**} : \|\Theta\| = 1 \} \subseteq \overline{i(B_X)}^{\|\cdot\|} = i(B_X)$.

Il suit que $B_{X^{**}} \subseteq i(B_X)$, donc $B_{X^{**}} = i(B_X)$: X est réflexif. $\square$

<u>Attention</u> :
- Il existe des espaces de Banach séparables, réflexifs, qui n'admettent pas de norme équivalente uniformément convexe.
- Dire que X et X^{**} sont linéairement isométriques ne suffit pas à garantir que X est séparable ! (cf "Espace de James"). Il faut vérifier que l'injection canonique est surjective, il peut exister une autre isométrie...

Dualité des espaces $L^p(\Omega)$

Échauffement : le cas de ℓ^p, $1 < p < +\infty$

On fixe $p \in]1, +\infty[$ et q tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

On utilisera $p(q-1) = q$, $q(p-1) = p$.

Def : Pour $u \in \ell^p$ on considère $T_u : \begin{cases} \ell^q \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n \end{cases}$

Fait 1 : Pour tout $u \in \ell^p$, $T_u \in (\ell^q)^*$ et $\|T_u\| = \|u\|$

Preuve : On fixe $u \in \ell^p$, qu'on peut supposer non nul.

Pour $v \in \ell^q$ on a $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \leq \|u\|_p \cdot \|v\|_q$ par Hölder.

Donc T_u est bien définie, et $\|T_u\| \leq \|u\|$.

Pour voir l'inégalité réciproque, considérons $v_n = \begin{cases} 1 & \text{si } u_n \geq 0 \\ -1 & \text{si } u_n < 0 \end{cases}$

puis posons $w_n = v_n \cdot |u_n|^{p-1}$. Alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |w_n|^q = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^{(p-1)q} = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p = \|u\|_p^p.$$

Donc $\|w\|_q^q = \|u\|_p^p$.

Et $T_u(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^{p-1} \cdot (u_n \underbrace{v_n}_{|u_n|}) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p = \|u\|_p^p = \|w\|_q^q$

Donc $T_u(w) = \|w\|_q^q = \|w\|_q \cdot \|w\|_q^{q-1} = \|w\|_q \cdot (\|u\|_p^{p/q})^{q-1} = \|w\|_q \cdot \|u\|_p$

Comme $w \neq 0$ on en déduit $\|T_u\| \geq \|u\|_p$, donc $\|T_u\| = \|u\|_p$ $\square$

Rqe : · Pour $p = 1, +\infty$ on peut définir T_u de la même façon, et le résultat ci-dessus reste vrai (exercice).

~~La preuve ci-dessus marche aussi pour~~

Fait 2 : Pour tout $\varphi \in (\ell^q)^*$ il existe $u \in \ell^p$ tq $\varphi = T_u$

Rqe : ce résultat reste vrai pour $p = +\infty$ ($(\ell^1)^* = \ell^\infty$) et la preuve est en exercice ; on a vu en TD que $(\ell^\infty)^* \neq \ell^1$ ($(\ell^\infty)^*$ n'est même pas séparable !)

Preuve : Soit $\varphi \in (\ell^q)^*$; on note $e_n(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Si u est tq $\varphi = T_u$, alors $\varphi(e_n) = T_u(e_n) = u_n$.

On n'a donc pas de choix pour u : on pose $u_n = \varphi(e_n)$.
Il nous reste à montrer que $u \in \ell^p$.

Si c'est le cas, on aura $T_u(v) = \varphi(v)$ pour tout $v \in \text{Vect}(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}})$

Comme $\text{Vect}(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ est dense dans ℓ^q, on conclura par continuité de φ et T_u que $\varphi = T_u$.

On pose $v_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi(e_n) \geq 0 \\ -1 & \text{si } \varphi(e_n) < 0 \end{cases}$ puis $w_n = v_n \cdot |\varphi(e_n)|^{p-1}$

$$\sum_{n=0}^{N} |\varphi(e_n)|^p = \varphi(x), \quad \text{avec} \quad x_n = \begin{cases} w_n & \text{si } n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Et $\varphi(x) \leq \|\varphi\| \cdot \|x\|_q$, avec

$$\|x\|_q = \left(\sum_{n=0}^{N} |\varphi(e_n)|^{(p-1)q}\right)^{1/q} = \left(\sum_{n=0}^{N} |\varphi(e_n)|^p\right)^{1/q}$$

Donc :
$$\sum_{n=0}^{N} |\varphi(e_n)|^p \leq \|\varphi\| \cdot \left(\sum_{n=0}^{N} |\varphi(e_n)|^p\right)^{1/q}, \text{ d'où}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{N} |\varphi(e_n)|^p\right)^{1/p} \leq \|\varphi\|.$$

On conclut que $u \in \ell^p$, et finalement $\varphi = T_u$ $\square$

On souhaite démontrer un analogue de ce résultat pour un espace $L^p(\Omega, \mu)$ où (Ω, μ) est un espace mesuré quelconque.
(ℓ^p correspond au cas où $\Omega = \mathbb{N}$ avec la mesure de comptage)

On va se concentrer sur le cas $1 < p < +\infty$; on laisse en exercice la preuve que $(L^1(\Omega))^* = L^\infty(\Omega)$, au sens suivant :

$$\forall \varphi \in (L^1(\Omega))^* \ \exists g \in L^\infty(\Omega) \ \forall f \in L^1(\Omega) \quad \varphi(f) = \int_\Omega fg \, d\mu$$

Def : Pour $f \in L^p(\Omega)$, on pose $T_u : \begin{array}{l} L^q(\Omega) \to \mathbb{R} \\ g \mapsto \int_\Omega fg \, d\mu \end{array}$

L'inégalité de Hölder donne la continuité de T_u et le fait que $\|T_u\| \leq \|u\|$.

Avec la même idée que pour ℓ^p, on montre $\|T_u\| = \|u\|$.