Exercice : À l'aide de l'inégalité de Clarkson, montrer que $L^p(\Omega, \mu)$ est uniformément convexe pour $2 \leq p < +\infty$.

Preuve de l'inégalité de Clarkson :

On considère $f : t \mapsto (t^2+1)^{p/2} - t^p - 1$

Pour $t > 0$ $\quad f'(t) = \frac{p}{2} \cdot 2t \cdot (t^2+1)^{p/2-1} - p\,t^{p-1}$

$$f'(t) = pt\left[(t^2+1)^{\frac{p-2}{2}} - t^{p-1}\right] \geq 0$$

Donc f est croissante sur $[0, +\infty[$; soit $\alpha, \beta > 0$ on a

$f(0) = 0 \leq f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ donc :

$$0 \leq \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 1\right)^{p/2} - \frac{\alpha^p}{\beta^p} - 1 \quad \text{, autrement dit}$$

$$\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{p/2} \qquad \text{(vrai aussi pour } \alpha = 0 \text{ ou } \beta = 0\text{)}$$

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ on a donc :

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \left(\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2\right)^{p/2} = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right)^{p/2}$$

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \frac{a^p}{2} + \frac{b^p}{2} \quad \text{par convexité de } t \mapsto t^{p/2}$$

(car $p \geq 2$!)

L'inégalité de Clarkson suit immédiatement (en intégrant) □

Preuve que $L^p(\Omega, \mu)$ est réflexif pour $1 < p < +\infty$:

- Pour $p \geq 2$ cela suit de l'uniforme convexité qu'on vient d'établir.

- Pour $p \in]1, 2[$ $\quad \begin{cases} u \longmapsto T_u \\ L^p(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)^* \end{cases}$ est une isométrie

  de $L^p(\Omega)$ sur un sous-espace fermé de $L^q(\Omega)^*$.

  Comme $q \geq 2$, $L^q(\Omega)$ est réflexif ; donc $L^q(\Omega)^*$ est également réflexif.

  Finalement $L^p(\Omega)$ est un sous-espace fermé d'un espace réflexif, et est donc également réflexif. □

Les espaces $C(K)$ et leurs duaux

Étant donné un compact K, on note $C(K)$ l'espace vectoriel formé par les fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$.

Muni de $\|.\|_\infty$ (ce qu'on fera toujours dans la suite), $C(K)$ est un espace de Banach.

Rappelons qu'on a vu en exercice, comme une conséquence du théorème de Banach-Alaoglu, que pour tout espace normé X il existe un compact K et une isométrie $T : X \to C(K)$ (pas nécessairement surjective).

Autrement dit, "tout espace vectoriel normé est un sous-espace d'un $C(K)$" (fermé si X est un Banach).

Avant d'étudier le dual de $C(K)$, on va s'intéresser un peu à un compact métrique en particulier (et en général on ne va parler que du cas métrique, pour simplifier un peu).

<u>Def</u> : L'espace de Cantor est le compact $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit.

Une distance compatible est donnée par $d(x,y) = \inf\{2^{-n} : \forall i < n \ x(i) = y(i)\}$

C'est bien un compact, en tant que produit d'ensembles finis (et donc compacts).

Une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tend vers x si, et seulement si, pour tout i il existe N tq $n \geq N \Rightarrow x_n(i) = x(i)$.

<u>Notation</u> : Pour tout $s \in \{0,1\}^n$ on note $V_s = \{x : \forall i < n \ x(i) = s(i)\}$

Par définition de d, $V_s = B(x, 2^{-n})$ pour tout $x \in V_s$ (pour la distance d, deux boules ~~ouvertes~~ sont soit disjointes soit contenues l'une dans l'autre !)

Donc chaque V_s est ouvert, et les V_s forment une base d'ouverts de la topologie de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (chaque boule ouverte est de la forme V_s pour un certain s)

De plus, si $s \in \{0,1\}^n$ et $x \notin V_s$, si on note t la restriction de x à $\{0,1\}^n$, on a $\begin{cases} x \in V_t \\ V_t \cap V_s = \emptyset \end{cases}$

Le complémentaire de V_s est donc $\bigcup_{t \in \{0,1\}^n, t \neq s} V_t$: c'est un ouvert. (pour $s \in \{0,1\}^n$)

Par conséquent, V_s est fermé. Donc $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d)$ admet une base de sa topologie formée de parties qui sont à la fois ouvertes et fermées

Lemme : (i) $\{A \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}} : A$ est ouverte et fermée$\}$ est dénombrable.

(ii) Pour toute fonction continue $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $A_1, \dots, A_n$ ouverts-fermés, $q_1 \dots q_n \in \mathbb{Q}$ tels que $\| \sum_{i=1}^{n} q_i \chi_{A_i} - f \|_\infty \leq \varepsilon$.

(On note χ_{A_i} la fonction caractéristique de A_i ; c'est une fonction continue puisque A_i est à la fois ouvert et fermé)

Une conséquence immédiate de ce lemme est que $C(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ est séparable.

Preuve du lemme : (i) Soit A une partie ouverte et fermée.

Comme A est ouverte, c'est une réunion de $(V_s)_{s \in I}$, où I est un ensemble de suites de longueur finie de 0 et de 1.

Comme A est fermé, donc compact, il existe $J \subseteq I$ fini tq $A = \bigcup_{s \in J} V_s$.

Donc A est une réunion finie de V_s, et il n'y a qu'un ensemble dénombrable de V_s différents.

L'ensemble des parties finies d'un ensemble dénombrable est dénombrable ce qui permet de conclure.

(ii) Soit f continue, $\varepsilon > 0$. Comme $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est compact, il existe $\delta > 0$ tq $\forall x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $d(x,y) \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Soit n tq $2^{-n} \leq \delta$; pour tout $s \in \{0,1\}^n$ et tout $x, y \in V_s$ on a $d(x,y) \leq 2^{-n}$, donc $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

On choisit un $x_s \in V_s$ pour chaque $s \in \{0,1\}^n$, et un rationnel q_s tel que $|f(x_s) - q_s| \leq \varepsilon$.

Pour tout $y \in V_s$, on a $|f(y) - q_s| \leq |f(y) - f(x_s)| + |f(x_s) - q_s| \leq 2\varepsilon$.

Donc $|f(y) - \sum_{s \in \{0,1\}^n} q_s \chi_{V_s}| \leq 2\varepsilon$ pour tout $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ □

On va admettre le résultat suivant (dont la preuve serait un peu longue pour nous, mais n'est pas particulièrement difficile)

Thm : Soit X un compact métrisable. Alors il existe une surjection continue $\pi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to X$.

Corollaire : Soit X un compact métrisable. Il existe une application linéaire isométrique $T : C(X) \to C(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$

Par conséquent, pour tout espace de Banach séparable E il existe une isométrie linéaire de E dans $C(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$

Preuve du corollaire. Soit X un compact métrisable, et $\pi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to X$ une surjection continue.

Pour $f \in C(X)$, on pose $T(f) : \begin{cases} \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto f(\pi(y)) \end{cases}$

Clairement T est linéaire, et $\|T(f)\|_\infty = \sup_{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}} |f(\pi(y))|$

$$= \sup_{x \in X} |f(x)|$$
$$= \|f\|_\infty$$

Pour le deuxième part du corollaire, il suffit de se rappeler que tout Banach séparable est isométrique à un sous-espace d'un $C(X)$, pour X un compact métrisable, puis de plonger X isométriquement dans $C(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$.

$\square$

Notre but est maintenant d'établir le théorème suivant (cas particulier d'un résultat plus général, qui s'applique à des espaces localement compacts et non nécessairement métrisables)

Thm de Riesz : Soit X un compact métrisable, et $\varphi \in C(X)^*$.

Alors il existe deux mesures positives, finies, μ_1 et μ_2 sur X telles que :
$$\forall f \in C(X) \quad \varphi(f) = \int_X f\, d\mu_1 - \int_X f\, d\mu_2 .$$

On commencera par établir ce résultat pour des formes linéaires positives sur $C(X)$.

Def : Soit φ une forme linéaire sur $C(X)$. On dit que φ est positive si $\varphi(f) \geq 0$ pour toute $f \in C(X, \mathbb{R}_+)$.

Rque : Si φ est positive alors φ est nécessairement continue (et $\|\varphi\| = \varphi(1)$)

En effet, pour toute $f \in C(X) \setminus \{0\}$, $g = 1 - \frac{f}{\|f\|_\infty}$ est positive.

Donc $\varphi(g) \geq 0$, i.e. $\varphi\left(\frac{f}{\|f\|_\infty}\right) \leq \varphi(1)$, ou encore $\varphi(f) \leq \|f\|_\infty \cdot \varphi(1)$.

Donc φ est continue, $\|\varphi\| \leq \varphi(1)$, et l'égalité réciproque suit du fait que $\|1\|_\infty = 1$ donc $\|\varphi\| \geq \varphi(1)$.

Prop : Soit $\varphi \in C(X)^*$. Il existe deux formes linéaires positives φ_1, φ_2 telles que $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Preuve : Pour $f \in C(X, \mathbb{R}_+)$, posons $\varphi_1(f) = \sup\{\varphi(g) : 0 \leq g \leq f\}$

(on note $g \leq f$ pour dire que $\forall x \; g(x) \leq f(x)$)

Par définition, $\varphi_1(f) \geq \varphi(0) = 0$ pour tout $f \in C(X, \mathbb{R}_+)$

Soit $f_1, f_2 \in C(X, \mathbb{R}_+)$.

- Si $g_1 \leq f_1$, $g_2 \leq f_2$ alors $g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$.

Donc $\varphi(g_1 + g_2) = \varphi(g_1) + \varphi(g_2) \leq \varphi_1(f_1 + f_2)$.

En passant au sup sur g_1, g_2 : $\varphi_1(f_1) + \varphi_1(f_2) \leq \varphi_1(f_1 + f_2)$.

- Si $g \leq f_1 + f_2$, posons $\begin{cases} g_1 = \min(g, f_1) \\ g_2 = g - g_1 \end{cases}$; elle est positive, C^0.

De plus $g_1 \leq f_1$; $\begin{cases} \text{si } g(x) \leq f_1(x) & \text{alors } g(x) - g_1(x) = 0 = g_2(x) \\ \text{si } f_1(x) \leq g(x) & \text{alors } g_2(x) \leq g(x) - f_1(x) \leq f_2(x). \end{cases}$

Donc $g_2 \leq f_2$; et $g = g_1 + g_2$.

Par conséquent, $\varphi(g) = \varphi(g_1) + \varphi(g_2) \leq \varphi_1(f_1) + \varphi_1(f_2)$.

En passant au sup sur g : $\varphi_1(f_1 + f_2) \leq \varphi_1(f_1) + \varphi_1(f_2)$.

Finalement, on a obtenu que $\varphi_1(f_1 + f_2) = \varphi_1(f_1) + \varphi_1(f_2)$ pour tout $f_1, f_2 \in C(X, \mathbb{R}_+)$.

Comme tout $f \in C(X, \mathbb{R})$ s'écrit comme différence de deux fonctions continues à valeurs positives, cela permet d'étendre φ_1 en une forme linéaire sur $C(X, \mathbb{R})$, qui est positive par définition de φ_1.

De plus, pour tout $f \in C(X, \mathbb{R}_+)$ on a $\varphi(f) \leq \varphi_1(f)$, donc $(\varphi_1 - \varphi)(f) \geq 0$.

Posons $\varphi_2 = \varphi_1 - \varphi$: c'est une forme linéaire positive, et $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ $\square$

Le cas général du théorème de Riesz se déduit donc du résultat suivant.

<u>Thm de Riesz, version positive.</u>

Soit X un espace compact métrisable, et φ une forme linéaire positive sur $C(X)$. Alors il existe une mesure borélienne finie μ telle que :

$$\forall f \in C(X) \quad \varphi(f) = \int_X f \, d\mu.$$

(et une telle mesure μ est unique).

<u>Preuve qu'une telle mesure (si elle existe !) est unique.</u>

Soit μ une telle mesure, d une distance induisant la topologie de X et $\varepsilon > 0$. Soit K un fermé ($=$ un compact) de X.

Soit $L_\varepsilon = \{x \in X : d(x, K) \geq \varepsilon\}$ qui est fermé.

$f_\varepsilon(x) := \dfrac{d(x, L_\varepsilon)}{d(x, K) + d(x, L_\varepsilon)}$ $\qquad f_\varepsilon$ est continue, à valeurs dans $[0, 1]$.

De plus, $f_\varepsilon(x) = 1$ si $x \in K$, et $f_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ si $x \notin K$ (parce que $f_\varepsilon(x) = 0$ si $x \in L_\varepsilon$).

Par convergence dominée, (μ est une mesure finie : 1 est intégrable)

$$\mu(K) = \int_X \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x)\, d\mu(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_X f_\varepsilon\, d\mu = \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(f_\varepsilon).$$

Donc si μ_1, μ_2 sont deux mesures comme dans l'énoncé du théorème de Riesz, on a $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ pour tout compact K de X.

Par régularité des mesures finies sur un compact métrisable, on a pour tout borélien B :

$$\begin{cases} \mu_1(B) = \sup\{\mu_1(K) : K \text{ compact}, K \subseteq B\} \\ \mu_2(B) = \sup\{\mu_2(K) : K \text{ compact} \subseteq B\} \end{cases}$$

Donc $\mu_1 = \mu_2$. $\square$

(Admettre le résultat sur la régularité si nécessaire, ou bien le démontrer, par exemple à l'aide du lemme des classes monotones).

Supposons avoir démontré la version positive du théorème de Riesz dans le cas particulier $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

<u>Preuve de la version positive du thm de Riesz</u> : (en admettant pour l'instant le cas $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$)

Soit X un compact métrisable. On a vu qu'il existe $T : C(X) \to C(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ une isométrie linéaire, dont l'image est un fermé F_X de $C(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$.

Explicitement, on fixe $\pi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to X$ une surjection continue, et on pose $T(f) = f \circ \pi$.

Soit φ une forme linéaire positive ; on peut supposer $\varphi(1) \neq 0$ (sinon $\varphi = 0$ ...)

Pour $f \in$ ~~$C(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$~~ $C(X)$ on pose $\psi(f \circ \pi) = \dfrac{\varphi(f)}{\varphi(1)}$.

ψ est une forme linéaire, de norme 1, tq $\psi(1) = 1$, sur F_X.

Donc ψ s'étend (par Hahn-Banach) à une forme linéaire (encore notée ψ) avec les mêmes propriétés et définie sur $C(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ tout entier.

Grâce au résultat admis pour le moment, il existe une mesure de probabilité ν sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall f \in C(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) \quad \psi(f) = \int_{\{0,1\}^{\mathbb{N}}} f\, d\nu$$

En particulier, pour tout $f \in C(X)$ on a :

$$\varphi(f) = \int_{\{0,1\}^{\mathbb{N}}} f \circ \pi \, d\nu .$$

Si l'on définit une mesure de proba μ sur X en posant $\mu(A) = \nu(\pi^{-1}(A))$, la formule ci-dessus se réécrit :

$$\varphi(f) = \int_X f \, d\mu$$ □

<u>Reste à montrer la version positive de Riesz pour $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.</u>

Soit φ une forme linéaire positive sur $C(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$.

Pour A une partie ouverte et fermée de X, on pose :

$$\mu(A) = \varphi(\chi_A).$$

L'ensemble Σ des parties à la fois ouvertes et fermées forme une algèbre de parties ; et si A_1, A_2 sont dans cette algèbre et disjointes alors : $\mu(A_1 \sqcup A_2) = \varphi(\chi_{A_1} + \chi_{A_2})$

$$= \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

(Si on connaît le théorème d'extension de Carathéodory, la preuve est finie : μ est σ-additive sur Σ, et la tribu engendrée par Σ contient la tribu borélienne puisque Σ contient les ouverts...)

<u>Def.</u> Pour $A \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ on pose

$$\mu_*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B_n) : \forall B_n \in \Sigma, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \supseteq A \right\}$$

- Par définition, $A \subseteq B \Rightarrow \mu_*(A) \leq \mu_*(B)$; μ_* est à valeurs ≥ 0.
- Soit A un ouvert-fermé et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des ouverts fermés tq $A \subseteq \bigcup_n B_n$.

  Puisque A est compact, il existe N tq $A \subseteq \bigcup_{n=0}^{N} B_n$.

  En posant $\tilde{B}_0 = B_0$, $\tilde{B}_1 = B_1 \setminus B_0, \dots, \tilde{B}_k = B_k \setminus \bigcup_{i<k} B_i$, on a des ouvert-fermés $\tilde{B}_i$ deux à deux disjoints et tq $A \subseteq \bigsqcup_{i=0}^{N} \tilde{B}_i$.

  Donc $\mu\left(\bigsqcup_{i=0}^{N} \tilde{B}_i\right) = \sum_{i=0}^{N} \mu(\tilde{B}_i) \geq \mu(A)$.

  On obtient donc <u>$\mu_*(A) = \mu(A)$</u> pour tout ouvert-fermé A.

<u>Def.</u> Pour $A, B \subseteq X$ on pose $d(A,B) = \mu_*(A \Delta B)$.

Notons que $A \Delta C = (A \Delta B) \Delta (A \Delta C) \subseteq (A \Delta B) \cup (A \Delta C)$, donc

$$\forall A, B, C \qquad d(A,C) \leq d(A,B) + d(A,C).$$

Def : On considère $\Omega = \{ A \subseteq X : \forall \varepsilon \ \exists U \in \Sigma \ d(A, U) < \varepsilon \}$

Lemme : Pour $A, B \in \Omega$ disjoints on a $\mu_*(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$ et U, V ouverts-fermés tq $\begin{cases} \mu_*(A \Delta U) < \varepsilon \\ \mu_*(B \Delta V) < \varepsilon \end{cases}$

Alors $U \cap V \subseteq (A \Delta U) \cup (B \Delta V)$

Donc $\mu_*(U \cap V) \leq 2\varepsilon$.

$|\mu_*(A \cup B) - \mu_*(U \Delta V)| = |d(A, B) - d(U, V)| \leq 2\varepsilon$ (inégalité triangulaire)

$d(U, V) = \mu_*(U \Delta V) = \mu(U \Delta V) = \mu(U) + \mu(V) - \mu(U \cap V)$

$|d(U, V) - \mu_*(A) - \mu_*(B)| \leq |\underbrace{\mu(U) - \mu_*(A)}_{d(U,\phi) - d(A,\phi)}| + |\underbrace{\mu(V) - \mu_*(B)}_{d(V,\phi) - d(B,\phi)}| + \mu(U \cap V)$

$\leq 4\varepsilon$

Donc $|\mu_*(A \cup B) - \mu_*(A) - \mu_*(B)| \leq 6\varepsilon$

☐

Lemme : Ω est une tribu.

Preuve : * Soit $A \in \Omega$, et $U \in \Sigma$ tq $\mu_*(A \Delta U) \leq \varepsilon$.

Alors $U^c \in \Sigma$, et $A \Delta U = A^c \Delta U^c$: $\mu_*(A^c \Delta U^c) \leq \varepsilon$.

Donc $A^c \in \Omega$

* $\phi, X \in \Sigma$ donc $\phi, X \in \Omega$

* Soit A, B ~~disjoints~~ dans Ω ; soit $\varepsilon > 0$, $U, V \in \Sigma$ avec $\begin{cases} d(A, U) \leq \varepsilon \\ d(B, V) \leq \varepsilon \end{cases}$

Alors $\mu_*((A \cup B) \Delta (U \cup V)) \leq \mu_*((A \Delta U) \cup (B \Delta V)) \leq 2\varepsilon$

Donc Ω est stable par unions finies

Par conséquent Ω est stable par intersections finies, et il nous reste à montrer que Ω est stable par unions dénombrables disjointes

* Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans Ω avec $A_i \cap A_j = \phi$ si $i \neq j$. Soit $\varepsilon > 0$

Pour tout n on peut trouver un ouvert fermé U_n tq $\mu_*(U_n \Delta A_n) \leq \varepsilon . 2^{-n}$

Alors $\mu_*(\bigcup_n A_n \Delta \bigcup_n U_n) \leq \varepsilon . \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = 2\varepsilon$.

Donc si on montre que $\bigcup_n U_n$ est dans Ω, on a trouvé un élément O de Ω tq $d(\bigcup_n A_n, O) \leq 2\varepsilon$, et on a gagné !

Il ne reste plus qu'à "rendre les U_n disjoints" en posant $V_n = U_n \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} U_i$. Les V_i sont dans Σ, $\bigcup_i V_i = \bigcup_n U_n$

De plus, pour tout n on a $\mu\left(\bigcup_{i=0}^{n} V_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \mu(V_i)$, donc $\sum_{i=0}^{+\infty} \mu(V_i)$ converge.

Soit N tq $\sum_{i=0}^{N} \mu(V_i) \geq \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(V_i) - \varepsilon$.

On a :
$$\begin{cases} \bullet\ \mu_*\left(\bigcup_{i=0}^{N} V_i\right) = \sum_{i=0}^{N} \mu(V_i) \leq \mu_*\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} U_i\right) \\ \bullet\ \mu_*\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} U_i\right) = \mu_*\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} V_i\right) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(V_i). \end{cases}$$

Finalement, $\mu\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} \cancel{V_i}\ U_i \,\Delta\, \bigcup_{i=0}^{N} V_i\right) \leq \varepsilon$, ce qui conclut la preuve du lemme. $\square$

Dernier lemme : Sur Ω, μ_* est une mesure.

Preuve. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints dans Ω.

Alors : (i) $\forall N$ $\mu_*\left(\bigcup_{i=0}^{N} A_i\right) = \sum_{i=0}^{N} \mu_*(A_i)$ (cf lemme + haut)

Et $\mu_*\left(\bigcup_{i=0}^{N} A_i\right) \leq \mu_*\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right)$.

Donc $\sum_{i=0}^{+\infty} \mu_*(A_i) \leq \mu_*\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right)$

(ii) Par déf de μ_*, on a toujours $\mu_*\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \mu_*(A_i)$

Donc $\mu_*\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu_*(A_i)$. $\square$

On a fini de démontrer le théorème de Riesz pour des compacts métrisables.

On peut par exemple s'en servir pour définir la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$:

Soit $M \geq 0$; sur $\mathcal{C}([-M,M]^n)$ on pose $\varphi(f) = \int_{-M}^{M} \left(\cdots \int_{-M}^{M} f(x_1 \ldots x_n)\,dx_n \ldots \right) dx_1$

φ est une forme linéaire positive, il existe donc une unique mesure positive tq $\forall f$ $\varphi(f) = \int_{[-M,M]^n} f\,d\mu$

Cette mesure est l'unique mesure sur $[-M,M]^n$ tq :
Pour toute famille $[a_1, b_1] \ldots [a_n, b_n]$ de segments dans $[-M,M]$
on a $\mu\left(\prod_{i=1}^{n} [a_i; b_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} |b_i - a_i|$. (petit exercice...)

~~[illegible]~~ ier,

Il s'ensuit que, si $m \geq n$, alors $\mu_{m|[-n,n]^n} = \mu_n$.

Finalement, on obtient la mesure de Lebesgue λ_n en posant, pour A un borélien de $\mathbb{R}^n$:

$$\lambda(A) = \lim_{i \to +\infty} \mu_i(A \cap [-i,i]^n).$$

Une autre jolie conséquence du théorème de Riesz :

Théorème de Banach-Stone :

Soit K, L deux compacts métrisables tels que $\mathcal{C}(K)$ et $\mathcal{C}(L)$ soient isométriques (linéairement).
Alors K et L sont homéomorphes.

Voir feuille de TD pour la preuve (d'un énoncé plus précis).

Notons que si $h : K \longrightarrow L$ est un homéomorphisme, alors

$$T : \begin{cases} C(L) \longrightarrow C(K) \\ f \longmapsto f \circ h \end{cases}$$ est une isométrie linéaire.

Mentionnons (sans preuve) le résultat suivant de Milutin : si K, L sont des compacts métrisables et non dénombrables, alors $C(K)$ et $C(L)$ sont isomorphes.

Un peu de théorie spectrale

Dans cette section, on manipulera des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels normés (pour s'assurer que chaque application linéaire continue a un spectre non vide)

Def : Soit E un $\mathbb{C}$-espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$.
On appelle <u>spectre</u> de T l'ensemble suivant :

$$Sp(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda id \text{ n'est pas inversible}\}$$

Attention : Bien sûr toute valeur propre de T appartient à $Sp(T)$. Mais il peut exister des éléments du spectre de T qui ne sont pas des valeurs propres
(Donnez un exemple !)

On rappelle l'énoncé suivant, fondamental et dont la preuve doit être connue.

Thm : Soit E un espace de Banach, et T une application linéaire continue et inversible de E dans E.
Alors, tout $S \in \mathcal{L}(E, E)$ tel que $\|S - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ est inversible.
En particulier, l'ensemble des applications linéaires inversibles est un ouvert de $\mathcal{L}(E, E)$.

Preuve : • Commençons par le cas $T = id$. Soit $S \in \mathcal{L}(E, E)$ avec $\|S - Id\| < 1$.
Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \|(id - S)^n\|$ converge ; puisque $\mathcal{L}(E, E)$ est complet, $\sum_{n=0}^{+\infty} (id - S)^n$ converge. On conclut en vérifiant que $S \circ \sum_{n=0}^{+\infty} (id - S)^n = id = \sum_{n=0}^{+\infty} (id - S)^n \circ S$ (série télescopique).

• Pour le cas général, soit T inversible et S tq $\|S - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$.

~~Alors ...~~

~~On ...~~

On a $\|T^{-1}S - id\| = \|T^{-1}(S - T)\| \leq \|T^{-1}\| . \|S - T\| < 1$

Donc (par le premier cas) $T^{-1}S$ est inversible, donc S aussi $\square$

Exercice : Montrer que $T \mapsto T^{-1}$ est continue sur
$$Gl(E) = \{T \in \mathcal{L}(E) : T \text{ est inversible}\}.$$

Thm : Pour tout $T \in \mathcal{L}(E)$, $Sp(T)$ est un compact de $\mathbb{C}$, contenu dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|T\|\}$

Preuve : • Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \|T\|$.

Alors $\lambda I - T = \lambda(I - \frac{T}{\lambda})$ et $\|\frac{T}{\lambda}\| < 1$.

Donc $I - \frac{1}{\lambda}.T$ est inversible, d'où $\lambda \notin Sp(T)$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus Sp(T)$. Alors $T - \lambda I \in Gl(E)$, qui est ouvert.

Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $T - z I \in Gl(E)$ pour tout $z \in D(\lambda, \varepsilon)$. Autrement dit $\mathbb{C} \setminus Sp(T)$ est ouvert.

Finalement, $Sp(T)$ est fermé et borné dans $\mathbb{C}$, et est donc compact. □

Jusqu'à maintenant tout ce qu'on a fait est vrai sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$; c'est le résultat suivant qui justifie notre choix de travailler avec des $\mathbb{C}$-espaces de Banach.

Thm : Soit E un $\mathbb{C}$-espace de Banach (non réduit à $\{0\}$)
Alors $Sp(T) \neq \emptyset$ pour tout $T \in \mathcal{L}(E)$.

Preuve : Supposons $Sp(T) = \emptyset$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on pose

$$F(\lambda) = (T - \lambda\, id)^{-1}$$

Pour $\lambda \neq 0$ on a $F(\lambda) = \lambda^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}T - id\right)^{-1} \xrightarrow[|\lambda| \to +\infty]{} 0$.

De plus, si $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ et λ est tel que $\|(\lambda - \lambda_0) F(\lambda_0)\| < 1$, on a

$$F(\lambda) = (T - \lambda\, id)^{-1} = (T - \lambda_0 id - (\lambda - \lambda_0) id)^{-1}$$

$$F(\lambda) = (T - \lambda_0\, id)^{-1} \circ (id - (\lambda - \lambda_0).(T - \lambda_0\, id)^{-1})^{-1}$$

$$F(\lambda) = F(\lambda_0) \circ (id - (\lambda - \lambda_0) F(\lambda_0))^{-1} = F(\lambda_0) \circ \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^n . F(\lambda_0)^n$$

D'où finalement $F(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^n . F(\lambda_0)^{n+1}$ pour λ tq $\|(\lambda - \lambda_0) F(\lambda_0)\| < 1$.

Soit $\varphi \in (\mathcal{L}(E))^*$. On conclut de ce qu'on vient d'écrire que :

$$\begin{cases} \bullet\ \forall \lambda_0\ \forall \lambda \text{ tq } \|(\lambda - \lambda_0) F(\lambda_0)\| < 1 \quad (\varphi \circ F)(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \varphi(F(\lambda_0)^{n+1}) \\ \bullet\ \varphi \circ F(\lambda) \xrightarrow[|\lambda| \to +\infty]{} 0 \end{cases}$$

La première ligne montre que $\varphi \circ F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe ; la deuxième ligne donne $\varphi \circ F(\lambda) \xrightarrow[|\lambda| \to +\infty]{} 0$.

Donc $\varphi \circ F$ est bornée sur $\mathbb{C}$ et holomorphe : le théorème de Liouville permet de conclure que $\varphi \circ F$ est nulle.

Nous alors : $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $\forall \varphi \in \mathcal{L}(E)^*$ $\varphi(F(\lambda)) = 0$.

Par Hahn-Banach, on conclut que F est la fonction nulle, ce qui est impossible puisque $F(\lambda) \in GL(E)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

$\square$

<u>Définition</u> : Soit E un espace de Banach complexe, et $T \in \mathcal{L}(E)$.

On appelle <u>rayon spectral</u> de T le réel
$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in Sp(T)\}$$

On a déjà vu que ce sup est bien défini, et plus petit que $\|T\|$, parce que $\emptyset \neq Sp(T) \subseteq D(0, \|T\|)$.

<u>Théorème</u> : Soit E un espace de Banach complexe, et $T \in \mathcal{L}(E)$.
Alors $r(T) = \lim\limits_{n \to +\infty} \|T^n\|^{1/n} = \inf\limits_{n \geq 1} \|T^n\|^{1/n}$

<u>Preuve</u> : Soit $\ell = \inf\limits_{n \geq 1} \|T^n\|^{1/n} \geq 0$. Soit $\varepsilon > 0$

Fixons N tel que $\|T^N\|^{1/N} \leq \ell + \varepsilon$

Pour $n \geq N$, on peut écrire $n = N.p_n + q_n$ avec $0 \leq q_n \leq N-1$

De plus, $\|T^n\| = \|T^{N.p_n} . T^{q_n}\| \leq \|T^N\|^{p_n} . \|T\|^{q_n}$

Donc $\|T^n\|^{1/n} \leq \|T^N\|^{\frac{p_n}{n}} . \underbrace{\|T\|^{\frac{q_n}{n}}}_{\to 1}$ quand $n \to +\infty$, $\frac{p_n}{n} \to \frac{1}{N}$

Soit $\delta > 0$.

Par n suffisamment grand, on a $\begin{cases} \frac{p_n}{n} \in [\frac{1}{N} - \delta, \frac{1}{N} + \delta] \\ \frac{q_n}{n} \leq \delta \end{cases}$

Par continuité de $x \mapsto \|T\|^x$ sur $[0, +\infty[$, on conclut (en choisissant δ assez petit)

que pour n suffisamment grand on a $\|T^n\|^{1/n} \leq \|T^N\|^{1/N} + \varepsilon$
$\leq \ell + 2\varepsilon$.

Ceci montre la convergence de $\|T^n\|^{1/n}$ vers ℓ.

Pour $\lambda \in Sp(T)$ et $n \geq 1$, $T^n - \lambda^n . id = \underbrace{(T - \lambda id)}_{\text{pas inversible}} . \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k} . T^k$ n'est pas inversible

Donc $|\lambda^n| \leq r(T^n) \leq \|T^n\|$, d'où $|\lambda| \leq \|T^n\|^{1/n}$.

Par conséquent, $|\lambda| \leq \ell$ pour tout $\lambda \in Sp(T)$, et donc $r(T) \leq \ell$.

Reste à montrer l'inégalité réciproque.

Pour $\lambda > r(T)$ on pose $R(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)^*$

On a déjà vu (preuve que $Sp(A) \neq \emptyset$) que $\varphi \circ R$ est holomorphe sur $\{\lambda : |\lambda| > r(T)\}$.