Annexe B

Filtres, ultrafiltres, ultraproduits

Dans cette annexe, comme dans tout le cours, on se place dans un univers ou l'axiome du choix est vrai.

Définition B.1. Soit X un ensemble infini. Un *filtre* sur X est une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$;
2. $A \in \mathcal{F}$ et $B \supseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{F}$;
3. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

L'exemple le plus simple de filtre, et aussi le moins intéressant, est le suivant : pour tout $x \in X$, l'ensemble $\mathcal{F}_x = \{A \colon x \in A\}$ est un filtre.
Nettement plus intéressant : l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X \colon \text{ le complémentaire de } A \text{ est fini}\}$$

est un filtre sur X (toujours supposé infini, ce qui sera le cas dans toute cette section), appelé *filtre de Fréchet* sur X.

Exercice B.2. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur l'ensemble infini X. Montrer que soit $\mathcal{F}$ contient le filtre de Fréchet sur X, soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_x$ pour un certain $x \in X$.

L'exercice ci-dessus nous dit que tous les filtres "intéressants" contiennent le filtre de Fréchet. Mais comment peut-on définir de nouveaux filtres ?

Définition B.3. On dit qu'une famille $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ est une *base de filtre* si toutes les intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}$ sont non vides.

Proposition B.4. *Pour toute base de filtre $\mathcal{A}$ il existe un filtre contenant $\mathcal{A}$; le plus petit tel filtre est défini par*

$$\mathcal{F} = \{B \subseteq X \colon \exists A \in \mathcal{A}\ B \supseteq A\} \ .$$

Preuve.
Soit $\mathcal{A}$ une base de filtre ; il est clair que $\mathcal{F}$ contient $\mathcal{A}$ et que tout filtre contenant $\mathcal{A}$ doit contenir la famille $\mathcal{F}$ définie ci-dessus, donc il nous suffit de prouver que $\mathcal{F}$ est bien un filtre.
On voit tout de suite que $\mathcal{F}$ satisfait les points 1 et 2 de la définition d'un filtre ; d'autre part, comme toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{A}$ est non vide, on voit que $\emptyset \notin \mathcal{F}$ et donc $\mathcal{F}$ est bien un filtre. □

Définition B.5. On dit qu'un filtre $\mathcal{F}$ est un *ultrafiltre* si pour tout filtre $\mathcal{G}$ on a

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{G} \ .$$

Les ultrafiltres sont donc exactement les filtres maximaux pour l'inclusion ; on dit qu'un ultrafiltre est *non principal* s'il n'est pas égal à un $\mathcal{F}_x$.
On vérifie facilement que l'ensemble des filtres contenant un filtre donné, ordonné par l'inclusion, est un ensemble ordonné inductif. Par conséquent, le lemme de Zorn garantit qu'il existe des ultrafiltres contenant tout filtre donné ; cet axiome, appelé *axiome de l'ultrafiltre*, est plus faible que l'axiome du choix.
Notons en tous les cas que, en présence de l'axiome de l'ultrafiltre, il existe des ultrafiltres non principaux sur tout ensemble infini X, puisqu'il existe des ultrafiltres contenant le filtre de Fréchet sur X.

Proposition B.6. *Un filtre $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si, et seulement si, pour tout $A \in X$ on a $A \in \mathcal{F}$ ou $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*

Preuve.
Supposons que $\mathcal{F}$ soit un filtre et qu'il existe $A \subseteq X$ tel que ni A ni $X \setminus A$ n'appartiennent à $\mathcal{F}$. Alors on va montrer que $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{A\}$ est une base de filtre, ce qui garantira l'existence d'un filtre contenant strictement $\mathcal{F}$ et montrera donc que $\mathcal{F}$ n'est pas un ultrafiltre.
Soit donc $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$; on doit montrer que $B_1 \cap \ldots \cap B_n \cap A$ ne peut être vide.
Raisonnons par l'absurde : si cette intersection est vide, alors $B_1 \cap \ldots \cap B_n \subseteq X \setminus A$, ce qui montre que $X \setminus A \in \mathcal{F}$ et cela contredit notre hypothèse. Donc $\mathcal{G}$ est bien une base de filtre et $\mathcal{F}$ n'est pas un ultrafiltre.
Réciproquement, supposons que $\mathcal{F}$ soit un filtre qui ne soit pas un ultrafiltre. Alors il existe un filtre $\mathcal{G}$ contenant strictement $\mathcal{F}$; considérons $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. On ne peut avoir $X \setminus A \in \mathcal{G}$ puisque $\mathcal{G}$ est un filtre, a fortiori il est impossible que $X \setminus A \in \mathcal{F}$ et donc ni A ni $X \setminus A$ n'appartiennent à $\mathcal{F}$. □

Dans les exercices en fin de section, on essaie de donner un exemple simple d'*ultraproduit* , objet très utile en théorie des modèles et basé sur l'existence d'ultrafiltres. Intuitivement, un ultrafiltre choisit pour toute partie A de X si elle est grosse (i.e appartient à l'ultrafiltre) ou petite (n'appartient pas à l'ultrafiltre), de telle façon que toute partie est soit grosse soit petite, que A soit grosse si et seulement si son complémentaire est petit, qu'une intersection finie de parties grosses soit grosse et que l'espace tout entier soit gros.

On va conclure cette section en expliquant pourquoi les filtres et ultrafiltres peuvent être utiles en topologie ; la justification de l'introduction des filtres en topologie est que dans certains espaces les points n'ont pas de base dénombrable de voisinages, et alors on ne peut plus se contenter d'utiliser des suites pour caractériser les notions habituelles de topologie (fonctions continues, ensembles fermés, etc.). Pourtant il est agréable de raisonner séquentiellement ; on peut alors utiliser des *suites généralisées*, comme le font généralement les anglo-saxons, ou bien des filtres. Voyons comment fonctionne cette deuxième approche.
Revenons aux espaces topologiques ; commençons par remarquer que, si X est un espace topologique et $x \in X$ alors la famille des voisinages de x, notée $\mathcal{V}_x$, forme un filtre. Ce filtre est l'analogue dans le contexte des espaces topologiques du filtre $\mathcal{F}_x$ défini plus haut.

Définition B.7. Soit X un espace topologique, $\mathcal{F}$ un filtre sur X et $x \in X$. On dit que $\mathcal{F}$ *converge vers* x si $\mathcal{F}$ contient le filtre $\mathcal{V}_x$ des voisinages de x.

Exercice B.8. Soit X un espace topologique. Montrer que X est séparé si, et seulement si, tout filtre convergent sur X a une limite unique.

Si l'on veut pouvoir utiliser nos filtres pour faire de la topologie, il faut qu'on comprenne ce qui arrive à un filtre quand on lui applique une fonction f. Si l'on considère simplement l'ensemble des images par f des parties contenues dans notre filtre, on n'obtient en général pas un filtre, tout bêtement parce que f n'est a priori pas surjective ! Par contre on obtient bien une base de filtre.

Définition B.9. Soit X, Y deux ensembles, $\mathcal{F}$ un filtre sur X et $f\colon X \to Y$ une fonction. Alors $\{B \subseteq Y\colon \exists A \in \mathcal{F}\ B = f(A)\}$ est une base de filtre, et on appelle *filtre image* de $\mathcal{F}$ par f le filtre engendré par cette base de filtre. Notons que A appartient au filtre image de $\mathcal{F}$ par f si, et seulement si, $f^{-1}(A)$ appartient à $\mathcal{F}$.

On laisse en exercice le fait de prouver que la famille introduite ci-dessus est bien une base de filtre.

Proposition B.10. *Le filtre image d'un ultrafiltre sur X est un ultrafiltre sur Y.*

Preuve.
Soit X, Y deux ensembles, $f\colon X \to Y$ une fonction et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X. On sait que $f(\mathcal{U})$ est un filtre. Pour prouver qu'il s'agit en fait d'un ultrafiltre, fixons une partie A de Y dont on suppose qu'elle n'appartient pas à $f(\mathcal{U})$. Alors on sait que $f^{-1}(A)$ n'appartient pas à $\mathcal{U}$, par conséquent $X \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$ et donc $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ appartient à $\mathcal{U}$. Ceci montre bien que $Y \setminus A$ appartient à $f(\mathcal{U})$, et donc $f(\mathcal{U})$ est un ultrafiltre. $\square$

La proposition ci-dessous explique comment les notions que nous avons introduites permettent de caractériser les fonctions continues.

Proposition B.11. *Soit X, Y deux espaces topologiques, $x \in X$ et $f\colon X \to Y$ une fonction.*
Alors f est continue en x si, et seulement si, $f(\mathcal{F})$ converge vers $f(x)$ pour tout filtre $\mathcal{F}$ qui converge vers x.

Preuve.
Commençons par supposer f continue en x, et considérons un filtre $\mathcal{F}$ qui converge vers x. Soit V un voisinage de $f(x)$. Comme f est continue en x, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x, par conséquent $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$ puisque $\mathcal{F}$ raffine le filtre des voisinages de x, et donc $V \in f(\mathcal{F})$. Ainsi, $f(\mathcal{F})$ converge vers $f(x)$.
Intéressons-nous maintenant à la réciproque : soit V un ouvert contenant $f(x)$, et $\mathcal{V}$ le filtre des voisinages de x. On sait que $f(\mathcal{V})$ converge vers $f(x)$, par conséquent $V \in f(\mathcal{V})$, ce qui signifie que $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}$, et donc $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x. Autrement dit, il existe un ouvert U contenant x et contenu dans $f^{-1}(V)$, c'est-à-dire un ouvert U tel que $f(U) \subseteq V$, et on vient de prouver que f est continue en x. $\square$

Continuons à avancer vers une preuve du théorème de Tychonoff ; pour cela il nous faut comprendre la convergence des filtres dans les espaces produits. La proposition suivante généralise aux filtres ce qu'on a déjà établi pour les suites.

Proposition B.12. *Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques, et $X = \prod X_i$ muni de la topologie produit. Un filtre $\mathcal{F}$ sur X est convergent si, et seulement si, chacun des filtres image $\pi_i(\mathcal{F})$ est convergent.*

Preuve.
Notons déjà que, puisque chaque projection $\pi_i\colon X \to X_i$ est continue, on sait

que $\pi_i(\mathcal{F})$ est convergent dès que $\mathcal{F}$ l'est. Nous n'avons donc qu'une implication à démontrer.
Supposons maintenant que $\mathcal{F}$ est un filtre sur X tel que chaque $\pi_i(\mathcal{F})$ converge vers $x_i \in X_i$. On va montrer que $\mathcal{F}$ converge vers $x = (x_i)_{i\in I}$. Pour cela, fixons un voisinage de x, dont on peut supposer qu'il est de la forme

$$U = \{y \in X \colon \forall j \in J \ \pi_j(y) \in U_j\} \ ,$$

où $J \subseteq I$ est un ensemble fini et chaque U_j est un ouvert de X_j qui contient x_j.
Par hypothèse, on sait que chaque $\pi_i(\mathcal{F})$ converge vers x_i ; en particulier, pour tout $j \in J$ on doit avoir $U_j \in \pi_j(\mathcal{F})$, c'est-à-dire qu'il existe $V_j \in \mathcal{F}$ tel que $\pi_j(V_j) \subseteq U_j$. Introduisons $V = \cap_{j\in J} V_j$; comme $\mathcal{F}$ est un filtre on sait que $V \in \mathcal{F}$, et de plus on a pour tout $j \in J$ que

$$\pi_j(V) \subseteq \pi_j(V_j) \subseteq U_j \ .$$

Ceci prouve que $V \subseteq U$, et donc $U \in \mathcal{F}$. On vient donc de prouver que tout voisinage de x appartient à $\mathcal{F}$, i.e que $\mathcal{F}$ converge vers x. $\square$

Notons pour plus tard une caractérisation très utile de la convergence des ultrafiltres.

Proposition B.13. *Soit X un espace topologique, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X et $x \in X$. Alors $\mathcal{U}$ converge vers x si, et seulement si,*

$$x \in \bigcap \mathcal{A}, \ \textit{avec } \mathcal{A} = \{A \subset X \colon A \in \mathcal{U} \textit{ et } A \textit{ est fermé}\} \ .$$

Preuve.
Commençons par supposer que $\mathcal{U}$ converge vers $x \in X$. Alors x appartient à A pour tout $A \in \mathcal{U}$, et on n'a donc essentiellement rien à prouver.
Réciproquement, supposons que x appartienne à l'intersection des éléments de $\mathcal{U}$ qui sont fermés dans X, et fixons un ouvert V contenant x.
On veut montrer que V appartient à $\mathcal{U}$. Si ce n'est pas le cas, on sait que $X \setminus V$ doit appartenir à $\mathcal{U}$, puisque $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre. Comme $X \setminus V$ est fermé, on aboutit à une contradiction. $\square$

Encore un dernier effort pour arriver au théorème de Tychonoff : cette fois-ci il nous faut exprimer un critère de compacité en termes de filtre. Ce critère n'est valide qu'en présence de l'axiome du choix.

Proposition B.14. *Soit X un espace topologique séparé. Alors X est compact si, et seulement si, tout ultrafiltre sur X est convergent.*

Preuve.
Supposons tout d'abord que X n'est pas compact, et considérons un recouvrement (O_i) de X par des ouverts qui ne contienne pas de sous-recouvrement fini. Alors la famille formée par les complémentaires des O_i est une base de filtre, et cette famille se trouve donc contenue (modulo l'axiome du choix) dans un ultrafiltre $\mathcal{U}$. Cet ultrafiltre ne peut converger vers aucun $x \in X$: en effet, pour tout $x \in X$ on a $x \in O_i$ pour au moins un $i \in I$, et comme $O_i \notin \mathcal{U}$ on voit que pour tout $x \in X$ il existe un voisinage de x qui n'appartient pas à $\mathcal{U}$, et donc $\mathcal{U}$ ne converge pas vers x.
Réciproquement, supposons X compact, et considérons un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur X. Alors la famille formée par les élements de $\mathcal{U}$ qui sont fermés dans X a la propriété d'intersections finies non vides (puisque $\mathcal{U}$ est un filtre), et donc a une intersection non vide. Fixons x dans cette intersection ; la proposition B.13 dit exactement que $\mathcal{U}$ converge vers x. $\square$

A vous maintenant de recoller les morceaux et de vous convaincre qu'on a bien tous les outils en main pour établir [i] le théorème de Tychonoff, dont l'énoncé est rappelé ci-dessous.

Théorème B.15. *Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques non vides, et $X = \prod X_i$ muni de la topologie produit. Alors X est compact si, et seulement si, chacun des X_i est compact.*

Notons qu'en fait le théorème de Tychonoff pour une famille d'espaces topologiques séparés X_i se trouve être plus faible que l'axiome du choix.

Exercices

Exercice B.16. Soit X un ensemble infini, I l'ensemble des parties finies de X. Pour tout $a \in I$ on définit

$$A_a = \{b \in I \colon a \subseteq b\}$$

Montrer que $\mathcal{F} = \{A_a \colon a \in I\}$ est un filtre non principal sur I.

Exercice B.17. On introduit l'espace $\beta\mathbb{N}$ des ultrafiltres sur $\mathbb{N}$, qu'on munit de la topologie produit de la topologie discrète sur $2^{\mathbb{N}}$; explicitement, une base d'ouverts pour cette topologie est donnée par les ensembles de la forme

$$\{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \colon A \in \mathcal{U}\}$$

i. Avec l'axiome du choix !

où A est une partie de $\mathbb{N}$.
(1) Montrer que $\beta\mathbb{N}$, muni de cette topologie, est compact et que l'application $i\colon \mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ qui à x associe $\{A \subseteq \mathbb{N}\colon x \in A\}$ est continue.
(2) On appelle *compactification* de $\mathbb{N}$ un compact K tel que $\mathbb{N}$ soit homéomorphe à une sous-partie dense de K. Montrer que pour toute compactification K de $\mathbb{N}$ il existe une surjection continue de $\beta\mathbb{N}$ sur K.
(3) Montrer qu'en fait $\beta\mathbb{N}$ a la propriété universelle suivante : pour tout compact K, et toute application continue $f\colon \mathbb{N} \to K$, il existe une unique application $g\colon \beta\mathbb{N} \to K$ telle que $f = g \circ i$.
On appelle $\beta\mathbb{N}$ le *compactifié de Stone-Cěch de* $\mathbb{N}$.

Exercice B.18. Montrer qu'un ultrafiltre sur un ensemble X est la même chose qu'une mesure finiment additive $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}$, c'est-à-dire une application μ définie sur $\mathcal{P}(X)$, prenant les valeurs 0 et 1, telle que $\mu(X) = 1$ et $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ pour toutes parties $A, B \subseteq X$ disjointes.

Exercice B.19. *Introduction aux ultraproduits.*
On utilise la définition d'un ultrafiltre donnée à l'exercice ci-dessus (mesure finiment additive).
1. Soit I un ensemble, μ un ultrafiltre sur I, et G_i une famille de groupes, d'élément neutre e_i. On définit $H \subseteq \prod G_i$ par

$$H = \{(g_i)\colon \mu(\{i \in I\colon g_i = e_i\}) = 1\}$$

Montrer que H est un sous-groupe distingué du groupe produit $\prod G_i$. On appelle *ultraproduit* des groupes G_i selon l'ultrafiltre μ le groupe quotient G/H.
2. On suppose cette fois-ci que les G_i sont des groupes munis d'une distance bi-invariante et bornée d_i (c'est-à-dire que $d_i(gkg', ghg') = d(k,h)$ pour tous g, g', h, k) et on considère l'ensemble

$$H' = \{(g_i)\colon \lim_{\mu} d_i(g_i, e_i) = 0\} \ .$$

($\lim_\mu$ désigne la limite selon l'ultrafiltre μ).
Montrer que H' est un sous-groupe distingué de $\prod G_i$; par conséquent $(\prod G_i)/H'$ est naturellement un groupe, quotient de l'ultraproduit des G_i selon μ ; on dit que ce groupe est l'ultraproduit des (G_i, d_i) selon μ (et si d_i est la distance discrète on retrouve l'ultraproduit du point 1).
3. Un cas particulier : on peut munir le groupe de permutation $\mathcal{S}_n$ de la *distance de Hamming* d_n défine par

$$d_n(\sigma, \tau) = \frac{|\{i\colon \sigma(i) \neq \tau(i)\}|}{n} \ .$$

On dit qu'un groupe G est *sofique* s'il existe un ensemble I, un ultrafiltre μ et des entiers n_i tels que G soit isomorphe à un sous-groupe de l'ultraproduit des $(\mathcal{S}_{n_i}, d_i)$ selon μ.
Montrer que $\mathcal{S}_n$ est sofique pour tout n ; prouver que tout groupe fini est sofique.
4. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la permutation $\tau_{n,i}$ de $\{1, \dots, n\}$ définie par

$$\tau_{n,i}(k) = k + i \ [n] \ .$$

L'application $i \mapsto \tau_{n,i}$ est un morphisme de $\mathbb{Z}$ dans $\mathcal{S}_n$. En supposant qu'il existe un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{Z}$ est sofique.
Avertissement : La question suivante est un problème ouvert...
5. Montrer que tout groupe est sofique.