Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre de printemps 2021-2022**
Master mathématiques et applications | Analyse réelle et complexe

---

Contrôle continu du 14/03/2022 (durée 1h30)

<u>Exercice 1.</u> *Soit $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. On considère la fonction f_a 2π-périodique et impaire définie par*

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, 2a[\\ 0 & \text{si } x \in [2a, \pi] \end{cases}$$

1. *Calculer les coefficients de Fourier de f, décrire le mode de convergence de sa série de Fourier et expliciter sa limite.*

   Comme f_a est impaire et à valeurs réelles, on utilise les coefficients de Fourier réels ; on a $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_a(t)\sin(nt)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{2a}\sin(nt)dt \\ &= \frac{2}{n\pi}(1-\cos(2an)) \\ &= \frac{4\sin^2(na)}{n\pi} \end{aligned}$$

   La fonction f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et continue en tout point sauf en chaque point de la forme $2k\pi$ ou $\pm 2a + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Le théorème de Dirichlet-Jordan nous garantit la convergence simple de la série de Fourier en tout point, vers $f_a(x)$ là où f_a est continue, vers 0 en chaque $2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), vers $\frac{1}{2}$ en chaque $2a + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) et vers $-\frac{1}{2}$ en $-2a + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).
   Comme la somme de la série de Fourier de f_a n'est pas continue, la convergence ne peut pas être uniforme.
   On pourrait être encore plus précis : le théorème de convergence normale de Dirichlet-Jordan allié au principe de localisation nous garantissent la convergence normale de la série de Fourier sur chaque segment ne contenant aucun des points de discontinuité de f_a (sur ces segments la restriction de f_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$).

2. *Donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^4(na)}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^3(na)\cos(na)}{n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^3(na)}{n}$.*

   Le théorème de Parseval nous donne l'égalité

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_a(t)|^2dt = \frac{2a}{\pi}$$

   En utilisant la formule obtenue plus haut pour $b_n(f)$ on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^4(na)}{n^2} = \frac{2a}{\pi}$$

   On en déduit l'égalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^4(na)}{n^2} = \frac{a\pi}{4}$.

   La deuxème somme se récrit sous la forme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(na)}{n}\frac{\sin(2na)}{2}$ et vaut donc $\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}S(f)(2a) = \frac{\pi}{16}$.

   La troisième somme est égale à $\frac{\pi}{4}S(f)(a) = \frac{\pi}{4}f(a) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 2. *On considère l'équation différentielle*

$$y''(t) + e^{\mathrm{i}t} y(t) = 0 \tag{E}$$

1. *Décrire la structure de l'ensemble des solutions maximales de* (E).

   Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients continus et à valeurs dans **C**. Le théorème de Cauchy–Lipschitz linéaire s'applique : toute solution maximale est globale et l'espace des solutions de (E) est un **C**-espace vectoriel de dimension 2.

2. *Soit f une solution maximale de* (E). *Montrer que f est 2π-périodique si, et seulement si, $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$.*

   Si f est 2π-périodique alors f' aussi, et on a $f(0) = f(2\pi)$, $f'(0) = f'(2\pi)$. Si f est telle que $f(0) = f(2\pi) = a$ et $f'(0) = f'(2\pi) = b$ alors f et $x \mapsto f(x + 2\pi)$ sont toutes deux solutions du problème de Cauchy $y''(t) + e^{\mathrm{i}t} y(t) = 0$, $y(0) = a$, $y'(0) = b$. Comme on l'a déjà remarqué, les conditions d'application du théorème de Cauchy–Lipschitz sont réunies : chaque problème de Cauchy associé à cette équation a une unique solution maximale, donc $f(x+2\pi) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

3. *Soit f une fonction 2π-périodique solution de* (E). *On note $(c_n(f))_{n\in\boldsymbol{Z}}$ les coefficients de Fourier complexes de f. Donner une relation liant $c_n(f)$ et $c_{n-1}(f)$ pour $n \in \boldsymbol{Z}$.*

   Comme f est solution d'une équation linéaire homogène d'ordre 2, à coefficients continus, f est de classe $\mathcal{C}^2$ (en fait, ici on voit même que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, remarque qu'on utilisera plus bas). On peut donc écrire $c_n(f') = inc_n(f)$ (puisque f est $\mathcal{C}^1$) puis $c_n(f'') = inc_n(f') = -n^2 c_n(f)$ (puisque f' est $\mathcal{C}^1$).

   Si f est une telle solution, alors on a pour tout t $f''(t) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} -n^2 e^{int}$ (on a remarqué plus haut que f est $\mathcal{C}^\infty$, il y a convergence normale de la série vers f''), et

   $$e^{\mathrm{i}t} f(t) = e^{\mathrm{i}t} \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(f) e^{int} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(f) e^{\mathrm{i}(n+1)t} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_{n-1}(f) e^{int}$$

   L'équation $f''(t) = -e^{\mathrm{i}t} f(t)$ nous donne, par unicité du développement en série de Fourier d'une fonction continue,

   $$\forall n \in \mathbf{Z} \quad n^2 c_n(f) = c_{n-1}(f)$$

4. *Déterminer toutes les solutions 2π-périodiques de* (E) *(on pourra en donner une écriture sous forme de série trigonométrique)*

   Soit f une telle solution. On déduit du résultat de la question précédente que $c_{-1}(f) = 0$ puis $c_n(f) = 0$ pour tout $n \leq -1$ par récurrence. Un autre raisonnement par récurrence donne l'égalité

   $$\forall n \geq 0 \quad c_n(f) = \frac{1}{(n!)^2} c_0(f)$$

   Ainsi toute solution 2π-périodique de (E) est de la forme $t \mapsto A \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2} e^{int}$, où $A \in \mathbf{C}$.

   Réciproquement, la décroissance rapide des coefficients de cette série permet de la dériver terme à terme deux fois (en fait, autant de fois qu'on veut) et de vérifier qu'une fonction de cette forme est bien solution de (E).

Exercice 3.

Dans cet exercice on fixe deux réels R_1, R_2 avec $0 \leq R_1 < R_2$.

On note $C(R_1, R_2) = \{z \in \boldsymbol{C} \colon r_1 < |z| < R_2\}$. On fixe une fonction f holomorphe sur $C(R_1, R_2)$; on rappelle que f, vue comme une fonction de $\boldsymbol{R}^2$ dans $\boldsymbol{R}^2$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $C(R_1, R_2)$.

Pour $r \in \,]R_1, R_2[$ et $t \in [0, 2\pi]$ on note $\gamma_r(t) = re^{\mathrm{i}t}$.

1. *Pour $r \in \,]R_1, R_2[$ on note $\mu(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{\mathrm{i}\theta})d\theta$. Montrer que μ est constante sur $]R_1, R_2[$ (on pourra s'intéresser à sa dérivée).*
   La fonction $(r,\theta) \mapsto f(re^{\mathrm{i}\theta})$ est de classe $\mathcal{C}^1$; le théorème de dérivation des intégrales à paramètres sur un segment (associé à la règle de la chaîne pour calculer les dérivées partielles de $(r,\theta) \mapsto f(re^{\mathrm{i}\theta})$) nous permet donc d'affirmer que μ est dérivable, et que pour tout $r \in \,]R_1, R_2[$ on a
$$\begin{aligned}\mu'(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}\theta} f'(re^{\mathrm{i}\theta})d\theta\\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi r}\int_0^{2\pi} (\mathrm{i}re^{\mathrm{i}\theta})f'(re^{\mathrm{i}\theta})d\theta\\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi r}\left[f(re^{\mathrm{i}\theta})\right]_0^{2\pi}\\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi r}(f(re^{2\mathrm{i}\pi}) - f(r))\\ &= 0\end{aligned}$$
   Donc μ est de dérivée nulle sur un intervalle : μ est constante.
2. *Montrer que pour tout $r \in]R_1, R_2[$ et tout $\theta \in [0, 2\pi]$ on a $f(re^{\mathrm{i}\theta}) = \displaystyle\sum_{n\in\boldsymbol{Z}} a_n r^n e^{\mathrm{i}n\theta}$ avec pour tout $n \in \boldsymbol{Z}$ l'égalité $a_n = \dfrac{1}{2\mathrm{i}\pi}\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$ et où la série ci-dessus converge absolument.*
   (on prendra bien soin de justifier que a_n ne dépend pas de r ; on pourra commencer par fixer r et appliquer un théorème du cours sur les séries de Fourier)
   Fixons r ; l'application $g_r \colon \theta \mapsto f(re^{\mathrm{i}\theta})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, 2π-périodique. En particulier, elle s'écrit en tout point comme somme de sa série de Fourier, et cette série converge normalement sur $\mathbf{R}$.
   Pour $n \in \mathbf{Z}$, on a
$$\begin{aligned}c_n(g_r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-\mathrm{i}nt}dt\\ &= \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(t)}{r^n e^{\mathrm{i}nt}}dt\\ &= \frac{r^n}{2\mathrm{i}\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{\mathrm{i}nt})}{r^{n+1}e^{\mathrm{i}(n+1)t}}\mathrm{i}re^{\mathrm{i}t}dt\\ &= r^n\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\\ &= a_n r^n\end{aligned}$$
   Le résultat de la question précédente, appliqué à la fonction $z \mapsto \dfrac{f(z)}{z^n}$, qui est holomorphe sur $C(R_1, R_2)$, montre que l'intégrale définissant a_n ne dépend pas de r.
   Finalement, on obtient pour tout $r \in \,]R_1, R_2[$ et pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ l'égalité
$$\begin{aligned}f(re^{\mathrm{i}t}) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(g_r)e^{int}\\ &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n r^n e^{int}\end{aligned}$$
   La série ci-dessus converge absolument pour tout t et tout $r \in \,]R_1, R_2[$ puisque la série de Fourier de g_r converge absolument en tout point.
3. *Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\boldsymbol{Z}} a_n z^n$ converge uniformément sur $C(\rho_1, \rho_2)$ pour tous réels ρ_1, ρ_2 tels que $R_1 < \rho_1 < \rho_2 < R_2$.*
   Pour tout $\rho \in \,]R_1, R_2[$, le résultat de la question précédente entraîne que la série $\displaystyle\sum_{n\leq -1} a_n\rho^n$ converge absolument. Le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}z^n$ est donc supérieur ou égal à $\dfrac{1}{R_1}$ (si

$R_1 \neq 0$, ou $+\infty$ si $R_1 = 0$), et cette série converge normalement sur tout disque $D(0,r)$ où $r < \dfrac{1}{R_1}$ si $R_1 > 0$, et pour tout r si $R_1 = 0$. Par conséquent, $\displaystyle\sum_{n \leq -1} a_n z^n$ converge normalement sur tout ensemble de la forme $\{z\colon |z| \geq r\}$ pour tout $r > R_1$.

Un raisonnement similaire montre que $\displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur tout disque $D(0,r)$ où $r < R_2$. En combinant ces deux propriétés, on conclut que $\displaystyle\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^n$ converge normalement (donc uniformément) sur toute couronne $C(\rho_1, \rho_2)$ telle que $R_1 < \rho_1 < \rho_2 < R_2$.

4. *On appelle* développement en série de Laurent *de f le développement obtenu ci-dessus ; énoncer et démontrer un théorème d'unicité du développement en série de Laurent.*

   Énonçons le résultat sous la forme suivante : pour toute fonction holomorphe sur une couronne $C(R_1, R_2)$, où $0 \leq R_1 < R_2$, il existe une unique suite $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ telle que l'on ait l'égalité

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^n$$

   pour tout $z \in C(R_1, R_2)$. De plus cette série converge normalement sur chaque couronne de la forme $C(\rho_1, \rho_2)$ où $R_1 < \rho_1 < \rho_2 < R_2$.

   Dans les questions précédentes, on a établi l'existence d'une telle suite ; reste à voir l'unicité.

   Pour cela, supposons que $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ sont deux suites telles que $f(z) = \displaystyle\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^n = \sum_{n \in \mathbf{Z}} b_n z^n$ pour tout $z \in C(R_1, R_2)$. Fixons $r \in \,]R_1, R_2[$.

   La fonction $t \mapsto f(re^{\mathrm{i}t})$ est continue, 2π-périodique, et on a pour tout t l'égalité

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n r^n e^{int} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} b_n r^n e^{int}$$

   Par unicité d'un développement en série de Fourier, on conclut que $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.