Contrôle final, 13 juin 2013, durée 3h00.

Le barême, sur 44 points, est donné à titre indicatif et est susceptible de changer. Notes de cours et appareils électroniques (y compris les téléphones portables) sont interdits. Lors de la correction, une importance particulière sera attachée à la qualité de la rédaction.

Exercice 1 (7 pts)**.** Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\frac{1}{x}}} \ ; \quad \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,dt \ .$$

Exercice 2 (6 pts)**.** On considère le domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y \text{ et } \frac{1}{x} < y < \frac{2}{x}\}$$

A l'aide du changement de variables $\begin{cases} u = \frac{x}{y} \\ v = xy \end{cases}$, montrer que l'intégrale $I = \iint_D x^4 e^{\frac{x}{y}}\,dxdy$ converge et donner sa valeur.

Exercice 3 (5 pts)**.** Montrer que l'équation $xy + yz + xz + 2x + 2y - z = 0$ définit implicitement une fonction φ de classe C^1 telle que $z = \varphi(x,y)$ au voisinage de $(0,0,0)$. Calculer les dérivées partielles de φ en $(0,0)$.

Exercice 4 (18 pts)**.** Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\,dt$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.
3. Calculer la limite de F en $+\infty$.
4. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x > 0$ on a
$$F'(x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+x^2u)(1+u)} \ .$$
5. Prouver que, pour tout $x > 0$ et différent de 1, on a $F'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$. Que se passe-t-il quand $x = 1$?
6. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$ converge et donner sa valeur.
7. Utiliser le résultat de la question précédente pour calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ (Indication : pour $t \in [0,1[$, on pourra commencer par écrire $\dfrac{1}{t^2-1}$ comme somme d'une série).

T.S.V.P.

Exercice 5 (8 pts)**.** Dans cet exercice, on fixe un entier $n > 0$ et on munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On considère une application $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 ; on utilise la notation $df(x)$ pour désigner la différentielle de f en un point $x \in \mathbb{R}^n$, et et on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall h \in \mathbb{R}^n \quad \langle df(x)(h), h \rangle \geq \alpha \langle h, h \rangle \ .$$

1. Montrer que $df(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
2. En considérant la fonction $t \mapsto \langle f(a + t(b - a)), b - a \rangle$, montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\langle f(b) - f(a), b - a \rangle \geq \alpha \langle b - a, b - a \rangle \ .$$

3. Montrer que f est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.