Contrôle final, 5 juin 2014 : correction.

Exercice 1. 1. En appliquant l'égalité des accroissements finis à la fonction sin (qui est de classe C^∞) entre 0 et x on obtient que pour tout $x \in]0,1]$ il existe $c \in]0,x[$ tel que

$$\sin(x) = \sin(x) - \sin(0) = \cos(c)(x-0) \ .$$

Comme $c \in]0,1]$ on a $0 < \cos(c) < 1$ et on obtient bien comme suggéré par l'énoncé que $\sin(x) < x$ pour tout $x \in]0,1]$. En particulier, la fonction intégrée (notons la f) est bien définie, continue sur $]0,1]$, et à valeurs positives. L'intégrale n'est généralisée qu'en 0, et

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \ .$$

Donc $f(x) \sim_0 \dfrac{6^\alpha}{x^{3\alpha}}$. En appliquant le critère des équivalents et le critère de convergence des intégrales de Riemann, on obtient que notre intégrale converge si et seulement si $3\alpha < 1$.

2. Comme $0 < \sin(x)$ sur $[0,1[$ et $\left|\dfrac{\sin(x)}{x^3}\right| \leq \dfrac{1}{x^3} < 1$ sur $]1,+\infty[$, on voit que la fonction intégrée (notons la g) est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$. De plus g est positive sur $]0,1]$; par contre elle change de signe au voisinage de $+\infty$. Commençons par l'étude en 0 : on a $\dfrac{\sin(x)}{x^3} = \dfrac{1}{x^2} + o(\dfrac{1}{x^2})$. On en déduit

$$g(x) = \ln(1 + \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})) = \ln(\frac{1}{x^2}) + \ln(x^2 + 1 + o(1)) \sim_0 \ln(\frac{1}{x^2}) = -2\ln(x) \ .$$

Le critère des équivalents, qu'on peut appliquer puisque g est positive sur $]0,1]$, nous permet de conclure que $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$; donc cette intégrale est convergente.

Pour l'étude en $+\infty$, puisque $\dfrac{\sin(x)}{x^3}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ on obtient que $g(x) \sim_{+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x^3}$. Cette fonction n'est pas de signe constant au voisinage de $+\infty$, mais $|g(x)| \sim_{+\infty} \left|\dfrac{\sin(x)}{x^3}\right|$, qui est intégrable en $+\infty$ puisque majorée par $\dfrac{1}{x^3}$. Donc $|g|$ est intégrable sur $[1,+\infty[$; par conséquent g aussi, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ est convergente.

Exercice 2. Pour passer en coordonnées polaires, on traduit la condition $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ par $1 \leq r^2 \leq 2$, et la condition $0 \leq y \leq x$ correspond à $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$. Par conséquent, notre intégrale (notons-la I) vaut

$$\begin{aligned}
I &= \int_{r=1}^{\sqrt{2}} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} (r\cos(\theta) - r\sin(\theta))^2 r \, dr d\theta \\
&= \int_{r=1}^{\sqrt{2}} r^3 \left(\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) - 2\cos(\theta)\sin(\theta))\, d\theta \right) dr \\
&= \int_{r=1}^{\sqrt{2}} r^3 (\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2})\, dr \\
&= \frac{3\pi}{16} - \frac{3}{8} \ .
\end{aligned}$$

Exercice 3. 1. On va noter $f(x,t) = t \mapsto \dfrac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}$ Fixons $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et à valeurs positives. Si $x = 0$ cette fonction est la fonction nulle et est donc intégrable. Sinon, en 0 on a $1 - \cos(xt) = \dfrac{x^2t^2}{2} + o(t)^2$, ce qui montre que $f(x,t)$ tend vers $x^2/2$ quand t tend vers 0^+ ; donc cette fonction se prolonge par continuité et l'intégrale converge en 0 pour tout x.

Comme $|f(x,t)| \leq \dfrac{2}{t^2}e^{-t} \leq \dfrac{2}{t^2}$, qui est intégrable sur $[1,+\infty[$, on voit que $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. On va appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres : f est une fonction continue sur $D = \mathbb{R}\times]0,+\infty[$, et admet une dérivée partielle en x en tout point de D, qui vaut $\dfrac{\sin(xt)}{t}e^{-t}$ et est une fonction continue sur D. Comme $|\sin(xt)| \leq |x|t$ pour tout $(x,t) \in D$ (voir la preuve donnée à l'exercice 1, conséquence immédiate de l'inégalité des accroissements finis) on a

$$\forall (x,t) \in D \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq xe^{-t} \ .$$

On voudrait une fonction de domination indépendante de x ; si on fixe $M > 0$, l'inégalité ci-dessus montre que $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq Me^{-t}$ sur $]-M,M[\times]0,+\infty[$. Comme on a vu que l'intégrale définissant F converge en tout point de $\mathbb{R}$, on peut conclure grâce au théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres que F est de classe C^1 sur $]-M,M[$ et que sa dérivée est donnée par la formule suivante :

$$\forall x \in]-M,M[\quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}\,dt \ .$$

Ce résultat étant valable pour tout $M > 0$, on en déduit que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est donnée par la formule ci-dessus.

Pour voir si F est de classe C^2, on dérive une fois de plus :

$$\forall (x,t) \in D \quad \frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x,t) = \cos(xt)e^{-t} \ .$$

Cette fonction est continue sur D, et est majorée en valeur absolue par la fonction $t \mapsto e^{-t}$, intégrable sur $]0,+\infty[$ et indépendante de x. Le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres s'applique donc à nouveau, et on conclut que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée seconde est donnée par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}\,dt \ .$$

On a calculé plusieurs fois cette intégrale au cours du semestre ; une façon de faire est d'utiliser deux intégrations par parties, une autre est d'utiliser les nombres complexes :

$$\begin{aligned} F''(x) &= \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t}\,dt\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}\right]_0^{+\infty}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} \ . \end{aligned}$$

3. La formule obtenue ci-dessus permet de déduire que $F'(x) = \arctan(x) + C$, où C est une constante ; comme $F'(0) = 0$ d'après la formule obtenue plus haut, on a $C = 0$. De même $F(0) = 0$, et on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \arctan(t)\,dt \\ &= [t\arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt \text{ (IPP)} \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \ . \end{aligned}$$

L'intégration par parties utilisée pour passer de la première à la deuxième ligne est valide puisque les fonctions mises en jeu sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, ce qui est plus que ce dont on a besoin.

Exercice 4. 1. La fonction $t \mapsto tx$ et f sont toutes deux différentiables ; la règle de la chaîne nous permet de conclure que φ est différentiable sur $]0, +\infty[$ et que sa dérivée en un point $t > 0$ est donnée par la formule

$$\varphi'(t) = df_{tx}(x) \; .$$

Comme $\varphi(x) = t^\alpha f(x)$, et que la dérivée de l'application $t \mapsto t^\alpha f(x)$ est l'application $t \mapsto \alpha t^{\alpha-1} f(x)$, on a donc l'égalité suivante :

$$\forall t > 0 \quad df_{tx}(x) = \alpha t^{\alpha-1} f(x) \; .$$

Pour $t = 1$ on obtient $df_x(x) = \alpha f(x)$. Comme x était quelconque, on en déduit que f vérifie l'identité d'Euler.

2. De même, la règle de la chaîne nous permet d'affirmer que ψ est différentiable et que sa dérivée en un point $t > 0$ est donnée par la formule

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx) + t^{-\alpha} df_{tx}(x) \\ &= -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx) + t^{-\alpha-1} df_{tx}(tx) \\ &= t^{-\alpha-1}(df_{tx}(tx) - \alpha f(tx)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dans le raisonnement ci-dessus, le passage de la première à la deuxième ligne est justifié par la linéarité de df_{tx}, et le passage de la troisième à la quatrième ligne par le fait que f vérifie l'identité d'Euler.
Comme $\psi \colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}^n$ est différentiable et que $\psi'(t) = 0$ pour tout $t > 0$, l'inégalité des accroissements finis nous permet de conclure que ψ est constante sur $]0, +\infty[$. En particulier, $\psi(t) = \psi(1)$ pour tout $t > 0$, autrement dit $\dfrac{1}{t^\alpha} f(tx) = f(x)$ pour tout $t > 0$; ce raisonnement étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on vient de montrer que f est homogène de degré α.

Exercice 5. 1. (a) Fixons $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\langle x_0 + h, x_0 + h \rangle = \langle x_0, x_0 \rangle + 2\langle x_0, h \rangle + \langle h, h \rangle \; .$$

Puisque $\langle h, h \rangle = \|h\|^2$ est négligeable devant $\|h\|$ quand $|h|$ tend vers 0, et $h \mapsto 2\langle x_0, h \rangle$ est linéaire, on voit que $x \mapsto \langle x, x \rangle$ est différentiable en x_0 et que sa différentielle est $h \mapsto 2\langle x_0, h \rangle$. La matrice jacobienne en x_0 est simplement le vecteur $2x_0$ et on conclut donc que $x \mapsto \langle x, x \rangle$ est de classe C^1.

(b) Comme $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, la règle de la chaîne nous permet de conclure que $x \mapsto \|x\|$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que sa différentielle en un point x_0 est $\langle \dfrac{x_0}{\|x_0\|}, h \rangle$.

2. (a) L'inégalité triangulaire nous donne $\|f(x) - a\| \geq \|f(x)\| - \|a\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Comme $\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$ et $\|a\|$ est une constante, on voit que $\|f(x) - f(a)\|$ tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$, et donc $g(x)$ aussi.

(b) Si on note $A = \mathrm{Inf}\{g(x) \colon x \in \mathbb{R}^n\}$ (qui est ≥ 0 puisque g est à valeurs positives), le résultat de la question précédente nous dit qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout x on ait

$$\|x\| \geq M \Rightarrow g(x) \geq A + 1 \; .$$

En particulier, pour un tel M on a $A = \mathrm{Inf}\{g(x) \colon x \in \mathbb{R}^n\} = \mathrm{Inf}\{g(x) \colon x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|x\| \leq M\}$.
Comme la boule fermée de centre 0 et de rayon M est compacte et g est continue, g atteint son minimum sur cette boule, ce qui montre que g atteint sa borne inférieure en un certain $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(c) Comme f est différentiable et $x \mapsto \|x\|^2$ l'est aussi, la règle de la chaîne nous assure que g est différentiable. Comme x_0 est un minimum pour g, c'est nécessairement un point critique et la différentielle de g en x_0 est donc nulle.

(d) Le résultat de la première question et la règle de la chaîne nous donnent que la différentielle de g en x_0 est l'application $h \mapsto 2\langle f(x_0) - a, Df_{x_0}(h) \rangle$. Comme $Df_{x_0}(h)$ est non nul pour tout $h \neq 0$ par hypothèse sur f, cette application ne peut être nulle que si $f(x_0) = a$.
On vient de montrer que pour tout a il existe x_0 tel que $f(x_0) = a$, autrement dit f est surjective.