# Contrôle final, 13 juin 2013 : Correction.

**Exercice 1.** Commençons par étudier $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\frac{1}{x}}}$. La fonction intégrée est continue sur $[1,+\infty[$, et à valeurs positives. Au voisinage de $+\infty$ on a

$$\frac{1}{x^{1+\frac{1}{x}}} = e^{-(1+\frac{1}{x})\ln(x)} = \frac{1}{x}e^{-\frac{\ln(x)}{x}} \sim_{+\infty} \frac{1}{x} \ .$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\frac{1}{x}}}$ est divergente.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,dt$ est généralisée en 0 et en $+\infty$ ; la fonction intégrée est continue sur $]0,+\infty[$, négative sur $]0,1]$ et positive sur $[1,+\infty[$. En 0 on a $\ln(t)e^{-t} \sim_0 \ln(t)$, et $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ est convergente. Donc $\int_0^1 \ln(t)e^{-t}\,dt$ est convergente. En $+\infty$, on peut par exemple utiliser le fait que $\ln(t)e^{-\frac{t}{2}}$ tend vers 0 quand $t$ tend vers $+\infty$, ce qui montre qu'il existe $M > 1$ tel que $e^{-t}\ln(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}$. Puisque $\displaystyle\int_M^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,dt$ converge, on en déduit que $\displaystyle\int_M^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,dt$ est convergente.

Au final, on obtient que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,dt$ converge.

**Exercice 2.** On suit l'énoncé et on pose

$$\varphi(x,y) = (u,v) = (\frac{x}{y}, xy) \ .$$

La fonction $\varphi$ est de classe $C^1$ sur l'ouvert $D$, et son déterminant jacobien en $(x,y) \in D$ vaut $2\frac{x}{y} \neq 0$. Pour montrer que $\varphi$ est un difféomorphisme de classe $C^1$ sur $D$, il nous reste à vérifier que $\varphi$ est injective sur $D$ ; on suppose donc que $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in D$ sont tels que $\varphi(x_1,y_1) = \varphi(x_2,y_2)$. On a alors

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \quad \text{et } x_1y_1 = x_2y_2$$

En multipliant ces deux égalités l'une par l'autre, on obtient $x_1^2 = x_2^2$, ce dont on déduit que $x_1 = x_2$ puisque $x_1, x_2$ sont strictement positifs par définition de $D$. On en déduit immédiatement que $y_1 = y_2$, par conséquent $\varphi$ est bien injective sur $D$, et est donc (d'après le théorème d'inversion globale) un difféomorphisme de classe $C^1$ de $D$ sur $\varphi(D)$. Pour déterminer $\varphi(D)$, on note que

$$\left(0 < x < y \text{ et } \frac{1}{x} < y < \frac{2}{x}\right) \Leftrightarrow \left(y > 0,\ 0 < \frac{x}{y} < 1 \text{ et } 1 < xy < 2\right) \ .$$

En particulier, $\varphi(D) \subseteq D' = \{(u,v)\colon 0 < u < 1 \text{ et } 1 < v < 2\}$. Pour voir la réciproque (si on veut donner tous les détails) : fixons $(u,v) \in D'$ ; alors $(x,y) = \left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{v}{u}}\right) \in D$, et $\varphi(x,y) = (u,v)$. On a donc aussi $D' \subseteq \varphi(D)$, ce qui prouve que $\varphi(D) = D'$.

La formule de changement de variables nous dit (en utilisant le fait que $x^2 = uv$) que notre intégrale est de même nature que $\displaystyle\iint_{D'} u^2v^2e^u \frac{1}{2u}\,dudv$, et que les deux intégrales sont égales si elles convergent.

Comme la fonction intégrée est continue sur $D'$ et à valeurs positives, on peut essayer d'appliquer la formule de Fubini :

$$\begin{aligned}\int_{u=0}^{1}\left(\int_{v=1}^{2}\frac{ue^u v^2}{2}\,dv\right)du &= \int_{u=0}^{1}\frac{ue^u}{2}\frac{2^3-1}{3}\,du\\ &= \frac{7}{6}\int_0^1 ue^u\,du\\ &= \frac{7}{6}\left([ue^u]_0^1-\int_0^1 e^u\,du\right)\\ &= \frac{7}{6}\ .\end{aligned}$$

(L'égalité de l'avant-dernière ligne vient de l'application de la formule d'intégration par parties à un produit de deux fonctions de classe $C^1$ sur le segment $[0,1]$)
Le théorème de Fubini nous permet donc de conclure que $I$ est convergente et vaut $\frac{7}{6}$.

**Exercice 3.** On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = xy+yz+xz+2x+2y-z$. C'est une fonction de classe $C^1$, et on a bien $f(0,0,0) = 0$. Pour pouvoir appliquer le théorème des fonctions implicites, on calcule la matrice jacobienne de $f$ et on obtient

$$Jac(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} y+z+2 & x+z+2 & x+y-1\end{pmatrix}$$

En $(0,0,0)$ cette matrice vaut $\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\end{pmatrix}$ ; puisque $-1 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet de conclure que l'équation $f(x,y,z) = 0$ définit bien au voisinage de $(0,0)$ une fonction $\varphi$ de classe $C^1$ telle que $z = \varphi(x,y)$.
Pour calculer les dérivées partielles de $\varphi$ en $(0,0)$, on considère l'équation $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$, valable sur un voisinage de $(0,0)$ ; en prenant les différentielles, et en appliquant l'équation obtenue en $(0,0)$, on obtient grâce à la règle de la chaîne que

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}\ .$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{cases} 2-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0)=0\\ 2-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)=0\end{cases}$$

Par conséquent, on obtient que $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0) = 2$.

**Exercice 4.**
1. La fonction $f\colon (x,t) \mapsto \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. De plus, sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$ on a $|f(x,t)| \leq \frac{\pi}{2(1+t^2)}$, et $t \mapsto \frac{\pi}{2(1+t^2)}$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$. D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, $F$ est donc bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Comme $\arctan(0) = 0$, on voit que $F(0) = 0$. Pour calculer $F(1)$, on écrit

$$F(1) = \int_0^{+\infty}\frac{\arctan(t)}{1+t^2}\,dt = \left[\frac{1}{2}\left(\arctan(t)\right)^2\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}\ .$$

3. On va appliquer le théorème de convergence dominée ; considérons une suite $(x_n)$ qui tend vers $+\infty$. Alors $F(x_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$, où $f_n$ est la fonction définie par $t \mapsto \dfrac{\arctan(x_n t)}{1+t^2}$. A $t > 0$ fixé, $\arctan(x_n t)$ converge vers $\dfrac{\pi}{2}$ quand $n$ tend vers $+\infty$, donc la suite $(f_n)$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto \dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$ sur $]0,+\infty[$. De plus, $|f_n(t)| \leq \dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$ pour tout $n$ et tout $t > 0$, et on a vu que la fonction majorante est intégrable sur $]0,+\infty[$. Grâce au théorème de convergence dominée, nous pouvons donc affirmer que $F(x_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2(1+t^2)}\,dt = \frac{\pi^2}{4}$.
Ceci est valable pour toute suite $(x_n)$ tendant vers $+\infty$, on a donc montré que
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi^2}{4} \ .$$

4. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} \ .$$
C'est une fonction continue des deux variables $(x,t)$ ; étant donné que l'énoncé ne nous demande pas de montrer que $F$ est dérivable en 0, on se doute qu'il peut y avoir un problème en ce point, qu'on traite comme d'habitude : on fixe $a > 0$, et on essaie de montrer que $F$ est dérivable sur $]a,+\infty[$. Sur $]a,+\infty[\times]0,+\infty[$, on a
$$0 \leq \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \leq \frac{t}{(1+a^2t^2)(1+t^2)} \ .$$
Pour pouvoir appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, il nous suffit donc de vérifier que, pour tout $a > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{(1+a^2t^2)(1+t^2)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
Cette fonction se prolonge par continuité en 0, est à valeurs positives, et est équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{t}{a^2t^4} = \dfrac{1}{a^2t^3}$. Par comparaison à une intégrale de Riemann, la fonction est bien intégrable sur $]0,+\infty[$ ; on peut donc appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres pour conclure que $F$ est de classe $C^1$ sur $]a,+\infty[$ (puisque la dérivée partielle de $f$ par rapport à $x$ est une fonction continue de $(x,t)$ et est dominée par une fonction intégrable indépendante de $x$) et que
$$\forall x > 0 \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\,dt \ .$$
Ceci etant vrai sur $]a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, c'est en fait vrai sur $]0,+\infty[$ ; en appliquant le changement de variables ($C^1$, bijectif) $u = t^2$, on obtient que, pour tout $x > 0$, on a
$$F'(x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+x^2u)(1+u)} \ .$$

5. Fixons un $x > 0$ et différent de 1 ; alors la fraction rationnelle (en $u$) $\dfrac{1}{(1+x^2u)(1+u)}$ peut s'écrire sous la forme
$$\frac{1}{(1+x^2u)(1+u)} = \frac{a}{1+u} + \frac{b}{1+x^2u} \ .$$
(Ceci est faux quand $x = 1$, auquel cas la fraction rationnelle est déjà un élément simple, $\frac{1}{(1+u)^2}$).
Pour calculer $a, b$, on applique la méthode habituelle : on multiplie par $u+1$ et on substitue $u = -1$, ce qui donne $a = \dfrac{1}{1-x^2}$ ; on multiplie par $1+x^2u$ et on substitue $u = -\dfrac{1}{x^2}$, obtenant ainsi $b = \dfrac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = \dfrac{x^2}{x^2-1}$.
Tous ces amusants calculs nous permettent d'obtenir que, pour tout $x > 0$ et différent de 1, on a
$$2F'(x) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{(1-x^2)(1+u)} + \frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2u)} \right) du$$

Calculons d'abord l'intégrale de 0 à $M$ pour un $M > 0$ qu'on fera ensuite tendre vers $+\infty$ :

$$\begin{aligned}\int_0^M \left(\frac{1}{(1-x^2)(1+u)} + \frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2u)}\right) du &= \left[\frac{1}{1-x^2}\ln(1+u) + \frac{1}{x^2-1}\ln(1+x^2u)\right]_0^M \\ &= \frac{1}{x^2-1}\ln\left(\frac{1+x^2M}{1+M}\right)\end{aligned}$$

Cette quantité tend vers $\dfrac{2\ln(x)}{x^2-1}$ quand $M$ tend vers $+\infty$, et nous avons finalement obtenu, au prix d'un peu de sueur et de larmes, l'égalité tant espérée, valable pour tout $x > 0$ et différent de 1 :

$$F'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1} \ .$$

En $x = 1$, on sait que cette quantité doit avoir une limite, qui vaut $F'(1)$, puisqu'on a montré que $F$ est de classe $C^1$ sur $]0, +\infty[$ ; et en effet, puisque $\dfrac{\ln(x)}{x-1}$ tend vers $\ln'(1) = 1$ quand $x$ tend vers 1, on obtient $F'(1) = \dfrac{1}{2}$ (qu'on aurait aussi pu obtenir simplement en calculant l'intégrale obtenue plus haut directement pour $x = 1$)

6. La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2-1}$ est continue sur $]0, 1[$ ; d'après le théorème fondamental de l'analyse et le résultat de la question précédente on a, pour tout $(x_1, x_2)$ tel que $0 < x_1 < x_2 < 1$ :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\, dt = F(x_2) - F(x_1) \ .$$

Puisque $F$ est continue sur $\mathbb{R}$, cette quantité a une limite quand on fait tendre $x_1$ vers 0 et $x_2$ vers 1 (indépendamment l'un de l'autre), qui vaut $F(1) - F(0) = \dfrac{\pi^2}{8}$. Par conséquent, nous venons d'établir que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\, dt$ converge et vaut $\dfrac{\pi^2}{8}$.

7. Pour tout $t \in ]0, 1[$, on a

$$\frac{\ln(t)}{t^2-1} = \ln(t)\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\ln(t)t^{2n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)$$

Nous avons affaire à une série de fonctions positives qui converge simplement sur $]0, 1[$ ; il est tentant d'échanger série et intégrale, ce qui est justifié puisque les fonctions sont à termes positifs et on sait que l'intégrale converge.

On fixe donc $n \geq 0$, et on calcule $\displaystyle\int_0^1 -\ln(t)t^{2n}\, dt$ ; on a très envie d'utiliser une intégration par parties - pour éviter un problème en 0 on fixe $\varepsilon \in ]0, 1]$ et on intègre par parties sur $[\varepsilon, 1]$ :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 -\ln(t)t^{2n}\, dt &= \left[\frac{-\ln(t)t^{2n+1}}{2n+1}\right]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 \frac{t^{2n}}{2n+1}\, dt \\ &= \frac{\ln(\varepsilon)\varepsilon^{2n+1}}{2n+1} + \frac{1-\varepsilon^{2n+1}}{(2n+1)^2}\end{aligned}$$

En faisant tendre $\varepsilon$ vers 0, on arrive à

$$\int_0^1 -\ln(t)t^{2n}\, dt = \frac{1}{(2n+1)^2} \ .$$

Nous en déduisons que

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \ .$$

Ce n'est pas tout à fait la somme des $\frac{1}{n^2}$, mais presque ; si on note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ (qui converge par comparaison série-intégrale), on a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8} \\ &= \frac{S}{4} + \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{3}{4}S = \frac{\pi^2}{8}$, ou encore $S = \frac{\pi^2}{6}$.

**Exercice 5.**

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ ; il nous suffit de montrer que le noyau de $df(x)$ est réduit à $\{0\}$. Si $h$ appartient au noyau de $df(x)$, on a $\langle df(x)(h), h \rangle = 0$, donc la propriété satisfaite par $f$ et le fait que $\alpha$ soit strictement positif nous donnent $\langle h, h \rangle = 0$, autrement dit $h$ est le vecteur nul.
2. Fixons $a, b \in \mathbb{R}^n$. On suit l'énoncé et on considère la fonction $g \colon t \mapsto \langle f(a + t(b-a), b-a \rangle$ définie sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est la composée de la fonction $t \mapsto f(a + t(b-a))$, qui est de classe $C^1$, et de la fonction $u \mapsto \langle u, b-a \rangle$, qui est linéaire et donc de classe $C^\infty$. Par conséquent, $g$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, et la règle de la chaîne (ajoutée au fait que la différentielle d'une application linéaire $F$ en un point $x$ est égale à $F$) nous permet de voir que
$$\forall t \in \mathbb{R} \ g'(t) = \langle df(a + t(b-a))(b-a), b-a \rangle \ .$$
La condition satisfaite par $f$ nous donne donc $g'(t) \geq \alpha \langle b-a, b-a \rangle$. En intégrant cette inégalité, on obtient que $g(1) - g(0) \geq (1-0)\alpha\langle b-a, b-a \rangle$, autrement dit
$$\langle f(b) - f(a), b-a \rangle \geq \alpha \langle b-a, b-a \rangle \ .$$
3. Le résultat de la question précédente montre que, si $a, b \in \mathbb{R}^n$ sont tels que $f(a) = f(b)$, on doit avoir $\langle b-a, b-a \rangle = 0$, autrement dit $b - a = 0$, ou encore $a = b$. Donc $f$ est injective sur $\mathbb{R}^n$ ; de plus $f$ est de classe $C^1$ par hypothèse, et on a vu à la première question que $df(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Le théorème d'inversion globale nous permet de conclure que $f$ est un difféomorphisme de classe $C^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.