Révisions d'analyse - Feuille I

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = y + x$ avec $y(0) = 1$,
2. $y' = \cos x + y$,
3. $y' + 2y = (x-2)^2$.

Exercice 2. Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $(1+x^2)y' - xy = 0$;
2. $y' + y\tan x = 0$, pour x dans $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Exercice 3. Trouver les solutions réelles de l'équation différentielle :

$$t^2 y' + y = 1.$$

Commencer par étudier sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$. Décrire les solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 4. Soit l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + 2xy = x.$$

1. Résoudre l'équation homogène asociée.
2. Calculer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $y'' - y = x^3 + x^2$,
2. $y'' - 2y' + y = e^x$,
3. $y'' - 2y' + y = \cos(mx)$ où $m \in \mathbb{R}$,
4. $y'' - 2y' + y = x^3 e^x + 2\cos x + (x^3 + 3)$ (utiliser le principe de superposition).

Exercice 6. Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - y = -6\cos x.$$

Exercice 7. Intégrer les équations suivantes :

1. $(2+x)y' = 2 - y$.
2. $xy' + y = \cos x$.

3. $(1+x)y' + y = (1+x)\sin x$.
4. $x^3 y' - x^2 y = 1$.

Exercice 8. Intégrer :

1. $y'' - 2y' + 2y = e^x$.
2. $y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x$.
3. $y'' - 4y' + 13y = 10\cos 2x + 25\sin 2x$.

Exercice 9. Intégrer les équations suivantes :

1. $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ (poser $u = e^x$).
2. $x(1-2\ln x)y'' + (1+2\ln x)y' - \frac{4}{x}y = 0$ (chercher une solution de la forme $y = x^\alpha$).

Exercice 10. Chercher les solutions développables en série entière des équations différentielles suivantes. Déterminer le rayon de convergence des séries entières obtenues et calculer leur somme.

1. $xy'' + 2y' + xy = 0$.
2. $x^2y'' + x(x+1)y' - y = 0$.
3. $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$

Exercice 11. On considère l'équation différentielle suivante :

$$ty' + y = 3t^{3/2}\cos(t^{3/2})$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution v de cette équation qui soit développable en série entière sur un voisinage de 0.
2. Trouver l'ensemble des solutions de l'équation sur $]0, +\infty[$ et en déduire une expression simple de v.

Exercice 12. Soit $p \in \mathbb{N}$ et

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant cette fonction.
2. A l'aide d'une équation différentielle, calculer $f(x)$; on pourra commencer par considérer $(1-x)f'(x)$.

Exercice 13. Soit $k \in \mathbb{R}$. Résoudre

$$y'' + k^2 y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

en commençant par le cas où $k \notin \mathbb{Z}$.