Révisions d'analyse - Feuille II

Exercice 1. À quelle condition sur f et g a-t-on $e^f \underset{a}{\sim} e^g$?

Exercice 2. Étudier en $+\infty$ et $-\infty$ la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt{x^2+x+1}$.

Exercice 3. Calculer les limites de

1. $\dfrac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x}$ en 0.
2. $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$ en 0.
3. $(\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$ en 0.
4. $(\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.

Exercice 4. Trouver un équivalent simple en $+\infty$ de $\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^x - 1$.

Exercice 5. Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1. $x \mapsto \ln(\cos(x))$ (à l'ordre 6).
2. $x \mapsto \tan(x)$ (à l'ordre 5).
3. $x \mapsto \sin(\tan(x))$ (à l'ordre 5).
4. $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 4).
5. $x \mapsto \exp(\sin(x))$ (à l'ordre 3).
6. $x \mapsto \sin^6(x)$ (à l'ordre 9.)

Exercice 6.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = \exp\,(\dfrac{-1}{x})$ sinon. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le développement limité de f en 0. Quelles conclusions en tirer ?
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(0) = 0$ et, si $x \neq 0$: $g(x) = x^3 \sin(\dfrac{1}{x})$. Montrer que g a un développement limité d'ordre 2 en 0 mais n'a pas de dérivée seconde (en 0).

Exercice 7. Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$.

Exercice 8. Développements limités en 0 de :

1. $\cos x . \ln(1+x)$ à l'ordre 4.
2. $\dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4.
3. $\arcsin\big(\ln(1+x^2)\big)$ à l'ordre 6.
4. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 3.

Exercice 9. 1. Développement limité en 1 à l'ordre 3 de $f(x) = \sqrt{x}$.
2. Développement limité en 1 à l'ordre 3 de $g(x) = e^{\sqrt{x}}$.
3. Développement limité à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$ de $h(x) = \ln(\sin x)$.

Exercice 10. Donner un développement limité en 0 à l'ordre 10 de :
1. $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \cos t^2 dt$.
2. $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$.

Exercice 11. Calculer le développement limité de $\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$ en 0 à l'ordre 3.

Exercice 12. Convergence et calcul de :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)dt}{t^2}, \qquad \int_0^\infty \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt, \qquad \int_1^\infty \frac{\ln t}{t^n} dt.$$

Exercice 13. Nature et calcul de :

$$\int_0^\infty \ln t \ln\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right) dt, a>0\,; \int_0^\infty \exp\left(-t^{\frac{1}{n}}\right) dt, n \in \mathbb{N}^*\,; \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - E(\frac{1}{t})\right) dt.$$

Exercice 14. Dire si les intégrales suivantes sont convergentes (en discutant éventuellement suivant la valeur des paramètres) :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt[3]{1-t}}, \quad \int_0^{\pi/2} \tan(t)\, dt, \quad \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}, \quad \int_0^1 \cos(\ln t)\, dt, \quad \int_0^1 \sin(\frac{1}{t})\, dt,$$

$$\int_0^\infty \frac{t^2+t-1}{\sqrt{t}(t^3-2t^2+3t-6)} dt, \quad \int_0^\infty t^\alpha [1-e^{-1/\sqrt{t}}]\, dt,$$

Exercice 15. Etudier l'existence des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt \;; \quad \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{(1-y)^3}} dt \;; \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1} \;; \quad \int_0^{+\infty} e^{-(\ln(t))^2} dt$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\arctan(t)}\, dt \;; \quad \int_0^{+\infty} (t+2-\sqrt{t^2+4t+1}))\, dt\ .$$