Révisions d'analyse - Feuille III

Exercice 1. Étudier l'existence des limites suivantes :

1. $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y\neq 0}} \frac{x^2y}{x+y}$
2. $\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ 2x^3+yz^2\neq 0}} \frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$
3. $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$
4. $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq\pm y}} \frac{x^4y}{x^2-y^2}$
5. $\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ (x,y,z)\neq(0,0,0)}} \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$

Exercice 2. Pour chacune des fonctions f suivantes, étudier l'existence d'une limite en $(0,0,0)$:

1. $f(x,y,z) = \frac{xyz}{x+y+z}$;
2. $f(x,y,z) = \frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$.

Exercice 3. Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = f(x+y, x-y).$$

Exercice 4. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x) \,;\, x \in \mathbb{R}\}$ par

$$f(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{x-y}\ .$$

Peut-on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5. Soit $f \,:\, \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } y=0 \\ y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \end{cases} \end{array}$.

1. Etudier la continuité de f.
2. Etudier l'existence et la valeur éventuelle de dérivées partielles d'ordre 1 et 2. On montrera en particulier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont définies en $(0,0)$ mais n'ont pas la même valeur.

Exercice 6. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n} dt$, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx$ et $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{|x|}{n}) dx$.

Exercice 7. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} (\sin(x))^n \, dx$, $\lim_{n\to+\infty} n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} \, dx$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3} \, dx$.

Exercice 8. Donner un équivalent de $\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} \, dx$.

Exercice 9. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t - 1} \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$, puis que $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} \, dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Exercice 10. Soit a un nombre complexe de module différent de 1 et n un entier relatif. Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{e^{it} - a} \, dt$.