Révisions d'analyse - Feuille IV

Exercice 1. Etudier les séries de termes généraux

$$u_n = \cos(\frac{\pi n^2}{2n^2 + an + 1}) \text{ avec } a > 0\,; \quad v_n = e^{-\sqrt{n}}\,; \quad w_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n$$

Exercice 2. En discutant éventuellement selon la valeur des paramètres réels α et β, étudier les séries de termes généraux positifs ($n \geq 2$) :

$\dfrac{n+\alpha}{n+\beta}$,

$\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+\alpha n}, \quad \alpha \leq 2$,

$\dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$,

$\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$,

$\dfrac{n^n \alpha^n}{n!}$,

$n^\alpha (\ln n)^\beta$,

$\dfrac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+k)!}, \quad k \in \mathbb{Z}$,

$\displaystyle\int_1^\infty \exp(-x^n)\, dx$ (indication : changer de variable $t = x^n$).

$\dfrac{1}{n(n^2-1)}$,

$\tan\left(\dfrac{1}{n}\right) + \ln n^2 + \dfrac{\sqrt{n}}{n^2 - n}$,

$\dfrac{1}{n\ln(n)}$

$\dfrac{1}{(1+1/\sqrt{n})^{n\sqrt{n}}}$,

$\sqrt[n]{n} - 1$,

$\displaystyle\int_n^{n+1/2} \frac{1}{\sqrt{t^4+1}} dt$,

$n^\alpha \left[(n+1)^{(n+1)/n} - (n-1)^{(n-1)/n}\right]$,

Exercice 3. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, on suppose que $\lim(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = 1$ et que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^\beta}) \text{ , où } \alpha > 0 \;\; \beta > 1.$$

On pose $v_n = n^\alpha u_n$. Etudier $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ et montrer que (v_n) a une limite finie. Application : Etudier la série de terme général

$$u_n = \sqrt{n!} \sin(1) \sin(\frac{1}{\sqrt{2}}) \cdots \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Exercice 4. Le but de cet exercice est de montrer la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4\sin^2 x}$.
Pour cela, on considère la série de terme général

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+x^4\sin^2 x}.$$

Par un changement de variable, transformer u_n en

$$u_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1+(n\pi+x)^4\sin^2 x}$$

Encadrer ensuite u_n par les termes de la suite v_n où

$$v_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1+(n\pi)^4\sin^2 x}$$

Calculer explicitement l'intégrale v_n et en déduire un équivalent de u_n. Conclure.

Exercice 5. Soit u_n une suite décroissante à termes positifs. On suppose que $(\sum u_n)$ converge. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}(nu_n) = 0.$$

Indication : Encadrer $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} u_k$ pour $n > p$.

Exercice 6. Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ converge. Étudier les séries

$$\sum a_n^2, \qquad \sum \frac{a_n}{1+a_n}, \qquad \sum a_n a_{2n}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{a_n}}{n}.$$

Exercice 7. Nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^p}$, $p \in]0,+\infty[$.

Exercice 8. Etudier les séries de termes généraux

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(\ln n)(n^{1/n})}\,; \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \text{ où } \alpha > 0\,; \quad w_n = \ln(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}) \text{ où } \alpha > 0\,.$$