Révisions d'analyse - Feuille III

Exercice 1. Etudier la série de terme général

$$u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n} \text{ où } a > 0,\ b > 0.$$

Exercice 2. Etudier les séries de termes généraux

$$u_n = \cos(\frac{\pi n^2}{2n^2 + an + 1}) \text{ avec } a > 0\,; \quad v_n = e^{-\sqrt{n}}\,; \quad w_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n$$

Exercice 3. En discutant éventuellement selon la valeur des paramètres réels α et β, étudier les séries de termes généraux positifs ($n \geq 2$) :

$\dfrac{n+\alpha}{n+\beta}$,

$\sqrt{n^4 + 2n + 1} - \sqrt{n^4 + \alpha n}, \quad \alpha \leq 2$,

$\dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$,

$\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$,

$\dfrac{n^n \alpha^n}{n!}$,

$n^\alpha (\ln n)^\beta$,

$\dfrac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+k)!}, \quad k \in \mathbb{Z}$,

$\displaystyle\int_1^\infty \exp(-x^n)\,dx$ (indication : changer de variable $t = x^n$).

$\dfrac{1}{n(n^2-1)}$,

$\tan\left(\dfrac{1}{n}\right) + \ln n^2 + \dfrac{\sqrt{n}}{n^2 - n}$,

$\frac{1}{n\ln(n)}$

$\dfrac{1}{(1 + 1/\sqrt{n})^{n\sqrt{n}}}$,

$\sqrt[n]{n} - 1$,

$\displaystyle\int_n^{n+1/2} \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}dt$,

$n^\alpha \left[(n+1)^{(n+1)/n} - (n-1)^{(n-1)/n}\right]$,

Exercice 4. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, on suppose que $\lim(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}) = 1$ et que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^\beta}) \text{ , où } \alpha > 0 \quad \beta > 1.$$

On pose $v_n = n^\alpha u_n$. Etudier $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ et montrer que (v_n) a une limite finie. Application : Etudier la série de terme général

$$u_n = \sqrt{n!}\sin(1)\sin(\frac{1}{\sqrt{2}})\cdots\sin(\frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Exercice 5. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1^2+2^2+...+k^2}$.

Exercice 6. Nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^p}$, $p \in]0,+\infty[$.

Exercice 7. Etudier les séries de termes généraux

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(\ln n)(n^{1/n})}\,; \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \text{ où } \alpha > 0\,; \quad w_n = \ln(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}) \text{ où } \alpha > 0\,.$$

Indication : Des calculs de D.L. peuvent etre fructueux ...

Exercice 8. Déterminer, en fonction des paramètres réels α, β, la nature des séries de termes généraux ($n \geq 2$)

$$\begin{array}{ll} (-1)^n n^\alpha, & n^\beta\left(1-(-1)^n n^\alpha\right), \\ \dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}, & \exp\left(\dfrac{-1}{\sqrt{n}}-1\right), \\ \ln\left(1-\dfrac{(-1)^n}{n}\right), & \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}, \\ \sin\left(2\pi\dfrac{n!}{e}\right) & \text{(on pourra utiliser que : } 1/e = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{k!}\text{).} \end{array}$$

Exercice 9.

1. On rappelle que la série harmonique alternée converge et a pour somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2$.

   Montrer la convergence des deux séries $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$ et $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}\right)$ et calculer leur somme.
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{4x^3-x}$.
3. Montrer la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^3-k}$ et calculer sa somme à l'aide de ce qui précède.
4. L'intégrale impropre $\int_1^\infty \frac{dx}{4x^3-x}$ converge t-elle ? Si oui, la calculer.

Exercice 10. Le but de cet exercice est de montrer la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4\sin^2 x}$.
Pour cela, on considère la série de terme général

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+x^4\sin^2 x}.$$

Par un changement de variable, transformer u_n en

$$u_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1+(n\pi+x)^4\sin^2 x}$$

Encadrer ensuite u_n par les termes de la suite v_n où

$$v_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1+(n\pi)^4 \sin^2 x}$$

Calculer explicitement l'intégrale v_n et en déduire un équivalent de u_n. Conclure.

Exercice 11. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n} dt$, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{|x|}{n}) dx$.

Exercice 12. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} (\sin(x))^n \, dx$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} \, dx$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3} \, dx$.

Exercice 13. Donner un équivalent de $\int_0^n \sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} \, dx$.

Exercice 14. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t-1} \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$, puis que $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1} \, dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Exercice 15. Soit a un nombre complexe de module différent de 1 et n un entier relatif. Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{e^{it}-a} \, dt$.