Révisions d'analyse - Feuille IV

Exercice 1. Déterminer, parmi les suites suivantes dans $\mathbb{R}^2$, celles qui convergent et donner leur limite le cas échéant :

$$u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{\sin(n)}{n^2}\right) ; \; v_n = \left(\cos(\frac{1}{n}), \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})\right) ; \; w_n = (\cos(n), \sin(n)) \; .$$

(Pour (w_n) on pourra par exemple examiner $w_{n+1} - w_{n-1}$))

Exercice 2. Déterminer si les fonctions suivantes ont une limite quand (x, y) tend vers $(0, 0)$:

$$f_1 : (x, y) \mapsto \frac{|x + y|}{x^2 + y^2} \; ; \quad f_2 : (x, y) \mapsto \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} \; ; \quad f_3 : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \; ; \quad f_4 : (x, y) \mapsto \frac{\sin(x + y)}{x + y}$$

Exercice 3. Soit $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$. Les écritures suivantes ont-elles un sens ?

$$(i) \lim_{x\to0} \lim_{y\to0} f(x, y) \quad ; \quad (ii) \lim_{y\to0} \lim_{x\to0} f(x, y) \quad ; \quad (iii) \lim_{(x,y)\to0} f(x, y).$$

Exercice 4. On considère $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on définit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $\varphi(x, x) = f(x)$ et $\varphi(x, y) = \frac{g(x)-g(y)}{x-y}$ si $x \neq y$. Quelle(s) condition(s) f et g doivent-elles vérifier pour que φ soit continue ?

Exercice 5. Soit $n > 0$ un entier.

1. Montrer qu'une norme N sur $\mathbb{R}^n$ ne peut pas être différentiable en 0.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et N la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Calculer le gradient de N en x.

Exercice 6. Soit $f\colon\ ]0, 1[\times]0, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x(1 - y) & \text{si } x \leq y \\ y(1 - x) & \text{si } x > y \end{cases}$$

Etudier la continuité et la différentiabilité de f.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \; . \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas continues en certains points de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8. Montrer que les applications suivantes sont de classe C^1. Ecrire leur matrice jacobienne en un point donné.

1. $(x, y) \to \sin(x^2 - y^2)$
2. $(x, y) \to (x + y, x - y)$
3. $(x, y, z) \to (xy^2, x^2 \exp(y + z), \sin x)$
4. $(x, y, z) \to (x + y^2, xyz^2)$

Exercice 9. On considère les fonctions $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x, y) = (\sin(xy), \cos x, \exp(y^2)), \quad g(u, v, w) = uvw.$$

1. Calculer explicitement $g \circ f$.
2. En utilisant l'expression trouvée en (1), calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.
3. Déterminer les matrices jacobiennes $M_f(x, y)$ et $M_g(u, v, w)$ de f et de g.
4. Retrouver le résultat de (2.) en utilisant un produit approprié de matrices jacobiennes.

Exercice 10. Soit $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une fonction différentiable, telle que $g(1, -1, 2) = (-1, 5)$ et la matrice jacobienne de g en $(1, -1, 2)$ soit égale à $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (xy, 3x^2 - 2y + 3)$. Calculer les dérivées partielles de $f \circ g$ en $(1 - 1, 2)$.

Exercice 11. Soit $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, et u la fonction définie par $u(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$. Montrer que u est différentiable et que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

Exercice 12. Soit $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{1+xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\right)$ et $g(x, y) = \arctan x - \arctan y$.

1. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles premières de f et de g.
3. Simplifier f à l'aide de g.