# Révisions d'analyse - Feuille I

**Exercice 1.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = y + x$ avec $y(0) = 1$,
2. $y' = \cos x + y$,
3. $y' + 2y = (x - 2)^2$.

**Exercice 2.** Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $(1 + x^2)y' - xy = 0$ ;
2. $y' + y \tan x = 0$, pour $x$ dans $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

**Exercice 3.** Trouver les solutions réelles de l'équation différentielle :

$$t^2y' + y = 1.$$

Commencer par étudier sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$. Décrire les solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

**Exercice 4.** Soit l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + 2xy = x.$$

1. Résoudre l'équation homogène asociée.
2. Calculer la solution de $(E)$ vérifiant $y(0) = 1$.

**Exercice 5.** Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $y'' - y = x^3 + x^2$,
2. $y'' - 2y' + y = e^x$,
3. $y'' - 2y' + y = \cos(mx)$ où $m \in \mathbb{R}$,
4. $y''-2y'+y = x^3e^x+2\cos x+(x^3+3)$ (utiliser le principe de superposition).

**Exercice 6.** Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - y = -6 \cos x.$$

**Exercice 7.** Intégrer les équations suivantes :

1. $(2 + x)y' = 2 - y$.
2. $xy' + y = \cos x$.
3. $(1 + x)y' + y = (1 + x) \sin x$.
4. $x^3y' - x^2y = 1$.

**Exercice 8.** Intégrer :

1. $y'' - 2y' + 2y = e^x$.
2. $y'' - 4y' + 4y = 2(x - 2)e^x$.

3. $y'' - 4y' + 13y = 10\cos 2x + 25\sin 2x$.

**Exercice 9.** Résoudre l'équation différentielle $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 2$. On pourra chercher des solutions polynomiales.

**Exercice 10.** Chercher les solutions développables en série entière des équations différentielles suivantes. Déterminer le rayon de convergence des séries entières obtenues et calculer leur somme.

1. $y'' + xy' + y = 0$.
2. $xy'' + 2y' + xy = 0$.
3. $x^2y'' + x(x+1)y' - y = 0$.
4. $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$

**Exercice 11.** Soit $p \in \mathbb{N}$ et

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant cette fonction.
2. A l'aide d'une équation différentielle, calculer $f(x)$ ; on pourra commencer par considérer $(1-x)f'(x)$.

**Exercice 12.** Associer aux équations suivantes des systèmes d'ordre 1.

1. $y^{(3)} = ty'' - \sin(t)y' + 3y$.
2. $y^{(3)} = 4y'' - 2y' + y$.

**Exercice 13.** Soit $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$. On cherche à résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} u' &= u - 3v \\ v' &= -3u + v \\ w' &= -3u - 3v + 4w \end{cases}$$

avec comme conditions initiales $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$ et $w(0) = w_0$.

1. Trouver une matrice $A$ telle que le système précédent s'écrive $Y' = AY$ avec $Y = (u, v, w)$.
2. Montrer que $A$ est diagonalisable, et calculer $\exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
3. Rédoudre le système différentiel.