

---

## Révisions d'analyse - Feuille II

---

**Exercice 1.** À quelle condition sur  $f$  et  $g$  a-t-on  $e^f \underset{a}{\sim} e^g$  ?

**Exercice 2.** Étudier en  $+\infty$  et  $-\infty$  la fonction  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}$ .

**Exercice 3.** Calculer les limites de

1.  $\frac{\sin x \ln(1 + x^2)}{x \tan x}$  en 0.
2.  $\frac{\ln(1 + \sin x)}{\tan(6x)}$  en 0.
3.  $(\ln(e + x))^{\frac{1}{x}}$  en 0.
4.  $(\ln(1 + e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$  en  $+\infty$ .

**Exercice 4.** Trouver un équivalent simple en  $+\infty$  de  $\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^x - 1$ .

**Exercice 5.** Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1.  $x \mapsto \ln(\cos(x))$  (à l'ordre 6).
2.  $x \mapsto \tan(x)$  (à l'ordre 5).
3.  $x \mapsto \sin(\tan(x))$  (à l'ordre 5).
4.  $x \mapsto (\ln(1+x))^2$  (à l'ordre 4).
5.  $x \mapsto \exp(\sin(x))$  (à l'ordre 3).
6.  $x \mapsto \sin^6(x)$  (à l'ordre 9).

**Exercice 6.** 1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = 0$  si  $x \leq 0$  et  $f(x) = \exp\left(\frac{-1}{x}\right)$  sinon. Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le développement limité de  $f$  en 0. Quelles conclusions en tirer ?

2. Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $g(0) = 0$  et, si  $x \neq 0 : g(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .  
Montrer que  $g$  a un développement limité d'ordre 2 en 0 mais n'a pas de dérivée seconde (en 0).

**Exercice 7.** Déterminer la limite en 0 de  $\frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$ .

**Exercice 8.** Développements limités en 0 de :

1.  $\cos x \cdot \ln(1+x)$  à l'ordre 4.
2.  $\frac{1}{\cos x}$  à l'ordre 4.
3.  $\arcsin(\ln(1+x^2))$  à l'ordre 6.
4.  $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$  à l'ordre 3.

**Exercice 9.** 1. Développement limité en 1 à l'ordre 3 de  $f(x) = \sqrt{x}$ .  
 2. Développement limité en 1 à l'ordre 3 de  $g(x) = e^{\sqrt{x}}$ .  
 3. Développement limité à l'ordre 3 en  $\frac{\pi}{3}$  de  $h(x) = \ln(\sin x)$ .

**Exercice 10.** Donner un développement limité en 0 à l'ordre 10 de :

1.  $x \mapsto \int_0^x \cos t^2 dt$ .
2.  $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$ .

**Exercice 11.** Calculer le développement limité de  $(\frac{\tan x}{x})^{1/x^2}$  en 0 à l'ordre 3.

**Exercice 12.** Convergence et calcul de :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2) dt}{t^2}, \quad \int_0^\infty \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt, \quad \int_1^\infty \frac{\ln t}{t^n} dt.$$

**Exercice 13.** Nature et calcul de :

$$\int_0^\infty \ln t \ln\left(1 + \frac{a^2}{t^2}\right) dt, a > 0; \int_0^\infty \exp\left(-t^{\frac{1}{n}}\right) dt, n \in \mathbb{N}^*; \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - E\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt.$$

**Exercice 14.** Dire si les intégrales suivantes sont convergentes (en discutant éventuellement suivant la valeur des paramètres) :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t} \sqrt[3]{1-t}}, \quad \int_0^{\pi/2} \tan(t) dt, \quad \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}, \quad \int_0^1 \cos(\ln t) dt, \quad \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt,$$

$$\int_0^\infty \frac{t^2 + t - 1}{\sqrt{t}(t^3 - 2t^2 + 3t - 6)} dt, \quad \int_0^\infty t^\alpha [1 - e^{-1/\sqrt{t}}] dt,$$

**Exercice 15.** Etudier l'existence des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt; \quad \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{(1-y)^3}} dt; \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}; \quad \int_0^{+\infty} e^{-(\ln(t))^2} dt$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t \arctan(t)} dt; \quad \int_0^{+\infty} (t + 2 - \sqrt{t^2 + 4t + 1}) dt.$$