Révisions d'analyse : feuille 3

Borne supérieure, borne inférieure

Exercice 1. On considère l'ensemble des nombres de la forme $1 + \frac{1}{n}$, où n décrit l'ensemble des entiers strictement positifs. Cet ensemble est-il majoré ? Minoré ? A-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ? Justifier vos réponses.

Exercice 2. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de A et tout y de B on ait $x \leq y$. Démontrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 3. Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ d'au moins deux éléments et x un élément de A.

1. Montrer que si $x < \sup A$, alors $\sup(A \setminus \{x\}) = \sup A$.
2. Montrer que si $\sup(A \setminus \{x\}) < \sup A$, alors $x = \sup A$.

Exercice 4. Si $a = \sup A$, montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a. Réciproque ?

Exercice 5. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup\{|x-y|,\ (x,y) \in A^2\} = \sup\ A - \inf\ A$.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée de réels. Montrer que $L = \limsup_{n\to\infty} u_n = \inf_n \sup_{k\geq n} u_k$ et $l = \liminf_{n\to\infty} u_n = \sup_n \inf_{k\geq n} u_k$ sont des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. Vérifier que ce sont respectivement la plus grande et la plus petite des valeurs d'adhérence.

Fonctions

Exercice 7. Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f\colon x \mapsto x^2$.

1. Déterminer les ensembles suivants : $f([-3,-1])$, $f([-2,1])$, $f([-3,-1] \cup [-2,1])$ et $f([-3,-1] \cap [-2,1])$. Les comparer.
2. Mêmes questions avec les ensembles $f^{-1}(]-\infty,2])$, $f^{-1}([1,+\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty,2] \cup [1,+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty,2] \cap [1,+\infty[)$.

Exercice 8. Soit $f : E \to F$ une application, $A, A' \subset E$ et $B, B' \subset F$. On rappelle que $A \Delta B$ désigne la *différence symétrique* de deux sous-ensembles A, B d'un ensemble X :$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

1. Simplifier $f(f^{-1}(f(A)))$ et $f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.
2. Montrer que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.
3. Comparer $f(A \,\Delta\, A')$ et $f(A) \,\Delta\, f(A')$.
4. Comparer $f^{-1}(B \,\Delta\, B')$ et $f^{-1}(B) \,\Delta\, f^{-1}(B')$.
5. A quelle condition sur f a-t-on : $\forall\ A \subset E,\ f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$?

Exercice 9. Soit E un ensemble, et A, B deux parties fixées de E. Soit $\phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B), X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$.

1. Qu'est-ce que $\phi(\varnothing)$? $\phi(E \setminus (A \cup B))$?
2. A quelle condition sur A et B, ϕ est-elle injective ?
3. Est-ce que le couple $(\varnothing, B)$ possède un antécédent par ϕ ?
4. A quelle condition sur A et B, ϕ est-elle surjective ?

Exercice 10. Soit $f : E \to F$. On considère les applications

$$\Phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F), A \mapsto f(A) \quad \text{et} \quad \Psi : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E), B \mapsto f^{-1}(B).$$

Montrer que :
1) f est injective $\iff$ Φ est injective $\iff$ Ψ est surjective.
2) f est surjective $\iff$ Φ est surjective $\iff$ Ψ est injective.

Exercice 11 **($\varphi \mapsto f \circ \varphi$ et $\varphi \mapsto \varphi \circ f$).** Soit $f : E \to F$ une application, et G un troisième ensemble ayant au moins deux éléments. On construit deux nouvelles applications :

$$f_* : E^G \to F^G, \varphi \mapsto f \circ \varphi \qquad \text{et} \qquad f^* G^F \to G^E, \varphi \mapsto \varphi \circ f$$

Montrer que :

1. f est injective $\iff$ f_* est injective $\iff$ f^* est surjective.
2. f est surjective $\iff$ f_* est surjective $\iff$ f^* est injective.

Exercice 12. On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective,}$$

$$g \circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective.}$$

Montrer que :

$$\big(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives }\big) \Leftrightarrow \big(f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}\big).$$

Exercice 13. Soit $f : X \to Y$. Montrer que

1. $\forall B \subset Y\ f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.
2. f est surjective ssi $\forall B \subset Y\ f(f^{-1}(B)) = B$.
3. f est injective ssi $\forall A \subset X\ f^{-1}(f(A)) = A$.
4. f est bijective ssi $\forall A \subset X\ f(\complement A) = \complement f(A)$.

Exercice 14. Soit $f : X \to Y$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

i. f est injective.
ii. $\forall A, B \subset X\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
iii. $\forall A, B \subset X\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Fonctions continues

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue telle que $f(0) = 1$, $\lim_{-\infty} f = 0$ et $\lim_{+\infty} f = 0$.

1. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que si $|x| > a$ alors $f(x) \leq \frac{1}{2}$.
2. Montrer que f est bornée et possède un maximum.

Exercice 16. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue, telle que pour chaque $x \in I$, $f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

Exercice 18. Soit f croissante sur $[a, b]$ et prenant toute valeur entre $f(a)$ et $f(b)$. Montrer que f est continue.

Exercice 19. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ croissante, montrer qu'elle a un point fixe.
Indication : étudier

$$E = \big\{x \in [0, 1] \mid \forall t \in [0, x], f(t) > t\big\}.$$

Exercice 20. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non constante telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2).$$

On suppose f continue en 0 et en 1, montrer que f est constante.

Exercice 21. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue telle que $f \circ f = f$. On note $E_f = \{x \in [0,1] | f(x) = x\}$. Montrer que $E_f \neq \varnothing$ puis que c'est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Décrire toutes les fonctions $f : [0,1] \to [0,1]$ continues telles que $f\circ = f$.

Exercice 22. Soit $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ admettant une limite finie en $+\infty$, montrer qu'alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 23. Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que : $\lim\limits_{|x|\to\infty} |f(x)| = +\infty \Leftrightarrow$ l'image réciproque de toute partie bornée est bornée.

Exercice 24.
1. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall\ x, y \in \mathbb{Q},\ f(x) < g(x)$.
   (a) Montrer que $f \leq g$.
   (b) Montrer qu'on n'a pas nécéssairement : $\forall\ x, y \in \mathbb{R},\ f(x) < g(x)$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue dont la restriction à $\mathbb{Q}$ est strictement croissante. Montrer que f est strictement croissante.

Exercice 25. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue. On pose $g(x) = \sup\big(f([x, x+1])\big)$. Montrer que g est continue.
Même question en supposant seulement f continue.

Exercice 26. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\sup\limits_{[a,b]} f = \sup\limits_{]a,b[} f$.

Exercice 27. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues. On suppose que : $\forall\ x \in [a,b],\ \exists\ y \in [a,b]$ tq $f(x) = g(y)$. Montrer qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Exercice 28. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires si :

$$\forall\ a, b \in \mathbb{R} \text{ avec } a < b, \forall\ y \text{ compris entre } f(a) \text{ et } f(b),\ \exists\ x \in [a,b] \text{ tq } f(x) = y.$$

1. Montrer que si f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et est injective, alors elle est continue.
2. Trouver une fonction discontinue ayant la propriété des valeurs intermédiaires.

Exercice 29. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue telle que $f(n) \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to \infty$.

Exercice 30. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \mathrm{Inf}\{|y - x| : y \in A\}$. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Fonctions dérivables

Exercice 31. Montrer que pour tout $t > 0$ on a $\arctan(t) > \frac{t}{1+t^2}$.

Exercice 32. Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$, (a et b réels) admet au plus trois racines réelles.

Exercice 33. Soit f une fonction continue et dérivable sur $[a, +\infty[$ et telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe un élément c dans $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 34. Par application du théorème des accroissements finis à $f(x) = \ln x$ sur $[n, n+1]$ montrer que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Exercice 35. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim\limits_{+\infty} f' = l$. Montrer qu'alors $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$.

Exercice 36. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall\, x \in V \setminus \{a\},\ f(x) \neq f(a)$.
2. Si f' est continue au point a, montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $f_{|V}$ soit injective.

Exercice 37. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et bornée telle que $f'(x) \to \ell$ lorsque $x \to +\infty$. Montrer que $\ell = 0$.

Exercice 38. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose que : $\forall\, x \in [a, b],\ f'(x) \neq 0$. Montrer que f' est de signe constant.
2. Dans le cas général, montrer que $f'([a, b])$ est un intervalle (c'est le *théorème de Darboux*).
3. Donner un exemple de fonction f définie sur $\mathbb{R}$, non continue, mais ayant la propriété que pour tout intervalle I $f(I)$ soit un intervalle.

Exercice 39. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ dérivable telle que $f \circ f = f$. Montrer que soit f est constante, soit $f(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$.