Ecrit blanc d'analyse, 18 février 2016, durée 5h.

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

Les problèmes ci-dessous sont indépendants. Il est recommandé aux candidat(e)s de ne pas hésiter à admettre les résultats d'une question pour les utiliser afin de répondre à une autre question.

Problème 1.

Partie I. Préliminaires

1. On rappelle que la fonction arccos: $[-1,1] \to [0,\pi]$ est définie par la relation
$$\forall t \in [-1,1] \forall x \in [0,\pi] \ \ \arccos(t) = x \Leftrightarrow t = \cos(x) \ .$$
Montrer que $\sin(\arccos(t)) = \sqrt{1-t^2}$ pour tout $t \in [-1,1]$. En utilisant la relation $\cos(\arccos(x)) = x$, valable pour $x \in [-1,1]$, en déduire une formule pour la dérivée de $\arccos(x)$ sur $]-1,1[$.
2. En utilisant (et en justifiant !) le fait que $\sin(\arccos(x)) \sim_{1^-} \arccos(x)$, montrer que $\arccos(x) \sim_{1^-} \sqrt{1-x^2}$.

Partie II. Polynômes de Tchebychev.

Pour tout entier naturel n, on définit une fonction $T_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ en posant $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

1. Calculer explicitement T_0, T_1, T_2.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-1,1]$, on a $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\forall x \in [-1,1] \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \ .$$
3. Montrer que T_n est une fonction polynomiale à coefficients entiers.
Le polynôme associé est appelé n-ième polynôme de Tchebychev.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ telle que $f_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ pour tout $x \in [-1,1]$. Par abus de notation, on notera cette fonction T_n dans la suite de l'énoncé.
5. Déterminer le degré de T_n, son coefficient dominant et sa parité (en fonction de n).
6. Montrer que, pour tout $t \in [0,\pi]$, on a $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$.
7. Calculer $\sup_{x \in [-1,1]} |T_n(x)|$.
8. Calculer $T_n'(1)$.
9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $u \in \mathbb{R}$ on a $|\sin(nu)| \leq n|\sin(u)|$.
10. Prouver que $\sup_{x \in [-1,1]} |T_n'(x)| = n^2$.
11. Prouver que, pour tout $r \in \mathbb{R}^*$, on a $T_n\left(\frac{r+r^{-1}}{2}\right) = \frac{r^n + r^{-n}}{2}$ (on pourra essayer de mener une démonstration par récurrence).

12. Montrer que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, il existe $r \in \mathbb{R}^*$ tel que $x = \dfrac{r + r^{-1}}{2}$.
13. Prouver que, pour tout $x \in [1, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq T_n(x) \leq \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n$.
14. En dérivant l'égalité obtenue en 6, trouver une équation différentielle linéaire homogène du second ordre vérifiée par T_n sur $[-1, 1]$.
15. Justifier que cette équation différentielle est en fait vérifiée sur $\mathbb{R}$.

Partie III. Approximation quadratique.

Dans la suite de ce problème, on note E l'espace vectoriel formé par les fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, par E_n le sous-espace vectoriel de E formé par les fonctions polynomiales de degré au plus n.

1. Montrer que, pour tout couple $(f, g) \in E \times E$, la fonction $x \mapsto f(x)g(x)\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $]-1, 1[$.
2. Montrer que l'application suivante :
$$\varphi \colon (f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)dx$$
définit un produit scalaire sur $E \times E$. Dans la suite, on suppose que l'espace E est muni de ce produit scalaire, que l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$; on note $\| \cdot \|$ la norme associée.
3. Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n soit de degré n et de coefficient dominant 1, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_n soit orthogonale à tous les éléments de E_{n-1}.
4. Montrer qu'il existe une unique famille $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales vérifiant les conditions suivantes :
   (a) La famille $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n est de degré n et de coefficient dominant 1.
5. Calculer $\langle T_n, T_m \rangle$ pour tout $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Que peut-on en conclure ?
Dans la suite de cette partie, on fixe $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$; on pose
$$d_2(f, E_n) = \inf \|f - Q\| \colon Q \in E_n\} \ .$$
6. (a) Justifier l'existence et l'unicité d'un vecteur $t_n(f)$ tel que $d_2(f, E_n) = \|f - t_n(f)\|$.
   (b) Exprimer $t_n(f)$ à l'aide des polynômes de Tchebychev. On dit que $t_n(f)$ est le polynôme de meilleure approximation quadratique de f sur E_n.
7. Montrer que $d_2(f, E_n) = \sqrt{\|f\|^2 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|^2}}$.
8. Montrer que, pour tout $h \in E$, on a $\|h\| \leq \sqrt{\pi} \sup\{|h(x)| \colon x \in [0, 1]\}$.
9. A l'aide d'un théorème de Weierstrass, prouver que $\|f - t_n(f)\|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
10. En déduire que $\|f\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|^2}}$.
11. Que peut-on dire d'une fonction h de E telle que, pour tout entier naturel n, on ait $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{h(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = 0$?

Problème 2.

Partie I. Préliminaires.

On rappelle le théorème suivant, dit *théorème de convergence dominée* :

> Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction continue par morceaux sur J, et (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux qui converge simplement vers f sur J. S'il existe une fonction g positive et intégrable sur J telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout $x \in J$ et tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est intégrable sur J et on a
>
> $$\lim_{n\to+\infty} \int_J f_n(x)\,dx = \int_J f(x)\,dx \ .$$

Dans cette partie, on fixe un intervalle J de $\mathbb{R}$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux de J dans $\mathbb{C}$.

1. On suppose que les (f_n) sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, convergent simplement[1] vers une fonction g continue par morceaux et que g est intégrable sur I. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_J f_n(x)\,dx$ converge et que $\displaystyle\int_J g(x)\,dx = \sum_{n\geq 0} \int_J f_n(x)\,dx$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x)\,dx = \ln(2)$; en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
3. On suppose maintenant que les (f_n) sont des fonctions continues, et que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement vers une fonction g. On suppose de plus que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |f_n|$ est intégrable sur J. Montrer que g est intégrable sur J et que l'on a $\displaystyle\int_J g(x)\,dx = \sum_{n\geq 0} \int_J f_n(x)\,dx$.

Dans la suite du problème, on pose, pour $t > 0$, $\varphi(t) = \dfrac{\arctan(t)}{e^{\pi t} - 1}$ et $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt$. On va étudier la fonction φ et montrer que I est convergente avant d'en établir diverses expressions.

Partie II.

1. Etudier un éventuel prolongement par continuité de φ en 0.
2. Montrer que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et
$$\varphi'(t) = \frac{e^{\pi t}}{(e^{\pi t}-1)^2(1+t^2)}\big(1 - e^{-\pi t} - \pi(1+t^2)\arctan(t)\big)$$
3. Etudier les variations de φ sur $]0, +\infty[$.
4. En déduire la borne supérieure de la fonction φ sur $]0, +\infty[$.
5. Justifier l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt$.
6. Démontrer les deux relations suivantes :
$$I = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-k\pi t} \arctan(t)\,dt \quad \text{et} \quad I = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-k\pi t}}{1+t^2}\,dt \ .$$

1. Ici il y a une erreur d'énoncé : on devrait supposer $\sum f_n = g$.

Partie III.
Dans cette partie, on introduit la fonction f définie par la relation suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt \ .$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, et montrer que f est continue sur cet ensemble.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que f est deux fois continûment dérivable sur $]0, +\infty[$ et qu'on a
$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} -t\frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad f''(x) = \int_0^{+\infty} t^2 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \ .$$
(on pourra commencer par étudier ce qui se passe sur $]a, +\infty[$ pour $a > 0$).
4. Trouver une équation différentielle linéaire de degré 2 satisfaite par f sur $]0, +\infty[$.
5. Soit x un réel strictement positif ; pour $y \geq x$ on définit
$$S_x(y) = \int_x^y \frac{\sin(t)}{t}\, dt \quad \text{et} \quad C_x(y) = \int_x^y \frac{\cos(t)}{t}\, dt \ .$$
Montrer que $S_x(y)$ et $C_x(y)$ admettent une limite quand y tend vers $+\infty$; on peut donc définir deux fonctions g et h sur $]0, +\infty[$ en posant
$$g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \lim_{y \to +\infty} S_x(y) \quad \text{et} \quad h(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\, dt = \lim_{y \to +\infty} C_x(y) \ .$$
6. Montrer que g et h sont dérivables, et calculer leurs dérivées ; calculer les limites de $g(x)$ et $h(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
7. Soit λ, μ deux réels. Montrer que la fonction $x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$ tend vers 0 en $+\infty$ si, et seulement si, $\lambda = \mu = 0$.
8. Résoudre l'équation différentielle satisfaite par f sur $]0, +\infty[$. On pourra commencer par trouver deux fonctions y_1, y_2 telles que toutes les solutions de l'équation sans second membre sont de la forme $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, puis appliquer la *méthode de variation des constantes*, c'est-à-dire chercher f sous la forme $f(x) = \lambda_1(x) y_1(x) + \lambda_2(x) y_2(x))$, avec $\lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0$. Exprimer la solution générale de cette équation à l'aide des fonctions g et h.
9. En déduire les deux expressions ci-dessous de la fonction f :
$$\forall x > 0 \ f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u+x}\, du \quad \text{et} \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t}\, dt \ .$$
10. Donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\, du$.
11. Démontrer l'égalité suivante :
$$I = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ku)}{\pi + u}\, du$$
12. Démontrer le résultat suivant :
$$I = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(u+\pi)^2} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(ku)}{k^2} \right) du \ .$$