Correction du premier écrit blanc d'analyse, 18/02/2016.

Problème 1.

Partie I.

1. Soit $t \in [-1,1]$ Comme $\arccos(t) \in [0,\pi]$, $\sin(\arccos(t))$ est positif ou nul ; de plus, la relation $\sin^2(u)+\cos^2(u)=1$, valable pour tout réel u, nous donne que $(\sin(\arccos(t))^2+t^2=1$, ce dont on déduit (puisque $\sin(\arccos(t))$ est positif) que $\sin(\arccos(t))=\sqrt{1-t^2}$.

   Puisque arccos est la bijection réciproque de cos, on sait que arccos sera dérivable en tout point x tel que $(\cos)'$ soit non nulle en $\arccos(x)$, autrement dit en tout $x \in]-1,1[$. La formule de dérivation des fonctions composées nous donne :

$$\forall x \in]-1,1[\quad -\sin(\arccos(x)) \cdot \arccos'(x) = 1 \quad \text{donc} \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \ .$$

2. Comme $\arccos(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 1, et $\sin(u) \sim u$ en 0, on obtient que $\sin(\arccos(x)) \sim_{1^-} \arccos(x)$, autrement dit $\sqrt{1-x^2} \sim_{1^-} \arccos(x)$.

Partie II.

1. Soit $x \in [-1,1]$. On a $T_0(x)=\cos(0)=1$; $T_1(x)=\cos(\arccos(x))=x$; $T_2(x)=\cos(2\arccos(x)) = 2(\cos(\arccos(x)))^2-1=2x^2-1$.
2. Soit $x \in [-1,1]$ et $n \geq 1$. En développant les cos, on obtient :

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x) &= \cos((n+1)\arccos(x))+\cos((n-1)\arccos(x)) \\ &= 2\cos(n\arccos(nx))\cos(\arccos(x)) = 2xT_n(x) \ . \end{aligned}$$

   On en déduit immédiatement que pour tout $n \geq 0$ on a $T_{n+2}(x)+T_n(x)=2xT_{n+1}(x)$, ou encore

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \ .$$

3. Montrons par récurrence que T_n est une fonction polynomiale à coefficients entiers. On l'a déjà vu pour $n=0,1,2$; supposons que $n \geq 2$ soit tel que T_k soit une fonction polynomiale à coefficients entiers pour tout $k<n$. Alors, le résultat de la question précédente nous dit que $T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)$, donc T_n est une combinaison linéaire à coefficients entiers de fonctions polynomiales à coefficients entiers. Par conséquent, T_n est aussi une fonction polynomiale à coefficients entiers, ce qui achève la démonstration.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le résultat de la question précédente nous permet de conclure qu'il existe une fonction polynomiale f_n sur $\mathbb{R}$ telle que $f_n(x)=T_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrons qu'une telle fonction est nécessairement unique ; si g est une autre fonction satisfaisant cette condition, alors $f_n(x)-g(x)=0$ pour tout $x \in [-1,1]$, par conséquent f_n-g est une fonction polynomiale qui s'annule une infinité de fois, ce qui n'est possible que si f_n-g est la fonction nulle, c'est-à-dire que si $g=f_n$.
5. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$ T_n est de degré n, de coefficient dominant 2^{n-1} et que la parité de T_n coïncide avec celle de n. D'après les calculs précédents, ces propriétés sont vraies pour $n=1,2$ (et $T_0=1$ donc les propriétés autres que le coefficient dominant sont vraies aussi pour $n=0$). Supposons maintenant que $n \geq 3$ soit un entier tel que ces propriétés soient vérifiées pour tout entier k tel que $1 \leq k < n$. Alors on a $T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)$, donc notre hypothèse de récurrence permet de conclure que :
   - T_n est de degré $1+n-1=n$.
   - Le coefficient dominant de T_n est le double de celui de T_{n-1}, qui vaut 2^{n-2}, donc le coefficient dominant de T_n est égal à 2^{n-1}.
   - Si n est pair, alors $x \mapsto 2xT_{n-1}(x)$ est une fonction paire, et de même pour T_{n-2}, par hypothèse de récurrence ; donc T_n est une fonction paire. On voit de même que, si n est impair, alors T_n est une fonction impaire.

6. Soit $t \in [0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}$. On a par définition de arccos, et puisque $t \in [0, \pi]$, que $\arccos(\cos(t)) = t$ et donc $T_n(\cos(t)) = \cos(n \arccos(\cos(t))) = \cos(nt)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $|\cos(u)| \leq 1$ pour tout réel u, il est clair que $|T_n(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [-1, 1]$. Par ailleurs, on a par définition (ou le résultat de la question précédente) que $T_n(1) = \cos(0) = 1$. On en déduit que $\sup\limits_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = 1$.
8. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ (pour $n = 0$ on sait que $T_0'(1) = 0$). Pour calculer $T_n'(1)$, on peut utiliser le fait que T_n est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$, par conséquent sa dérivée est continue en 1 et on doit avoir
$$T_n(1) = \lim_{x \to 1^-} T_n'(x) = \lim_{x \to 1^-} -\sin(n \arccos(x)) \cdot \frac{-n}{\sqrt{1 - x^2}} \ .$$
On sait que $n \arccos(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 1^-, par conséquent on a
$$\sin(n \arccos(x)) \sim_{1^-} n \arccos(x) \sim_{1^-} n\sqrt{1 - x^2} \ .$$
On en déduit que $\lim\limits_{x \to 1^-} -\sin(n \arccos(x)) \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} = n^2$, d'où $T_n'(1) = n^2$ pour tout n. (Remarquons que pour $n = 1, 2$ on obtient un résultat compatible avec la valeur de T_n qu'on a obtenue plus haut).
9. Soit $n \in \mathbb{N}$ et tout $u \in \mathbb{R}$. Procédons par récurrence sur n : pour $n = 0$ on a $|\sin(nu)| = 0 \leq 0 = n|\sin(u)|$. Supposons maintenant notre propriété vraie au rang n ; en utilisant une formule de trigonométrie, notre hypothèse de récurrence et le fait que $|\cos(x)| \leq 1$ pour tout réel x, on obtient
$$|\sin((n + 1)u)| = |\sin(nu) \cos(u) + \sin(u) \cos(nu)| \leq |\sin(nu)| + |\sin(u)| \leq (n + 1)|\sin(u)| \ .$$
Ceci conclut la démonstration.
10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in]-1, 1[$ on a
$$|T_n'(x)| = |(\cos(n \arccos(x))'| = \left| -\frac{\sin(n \arccos(x))}{\sqrt{1 - x^2}} \right| \leq n \left| \frac{\sin(\arccos(x))}{\sqrt{1 - x^2}} \right| = n^2 \ .$$
(L'inégalité ci-dessus vient du résultat de la question précédente).
Puisque $|T_n'(1)| = |T_n'(-1)| = n^2$, on a donc finalement $\sup\limits_{x \in [-1,1]} |T_n'(x)| = n^2$.
11. Comme suggéré dans l'énoncé, on va procéder par récurrence. Le résultat attendu est vrai pour $n = 0, 1$. Supposons que $n \geq 2$ soit tel que le résultat désiré soit vrai pour tout $k < n$. La relation $T_n(x = -xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ est une égalité entre fonctions polynomiales qui est vraie sur $[-1, 1]$, elle est donc vraie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Fixons $r \in \mathbb{R}^*$; on a
$$\begin{aligned} T_n(\frac{r + r^{-1}}{2}) &= (r + r^{-1})T_{n-1}(\frac{r + r^{-1}}{2}) - T_{n-2}(\frac{r + r^{-1}}{2}) \\ &= (r + r^{-1})\frac{r^{n-1} + r^{1-n}}{2} - \frac{r^{n-2} + r^{2-n}}{2} \qquad (\text{ récurrence}) \\ &= \frac{r^n + r^{-n}}{2} \ . \end{aligned}$$
12. Soit $x \in [1, +\infty[$; pour trouver $r \in]0, +\infty[$ tel que $x = \dfrac{r + r^{-1}}{2}$ on pourrait étudier la fonction $r \mapsto \dfrac{r + r^{-1}}{2}$, voire simplement lui appliquer le théorème des valeurs intermédiares (après avoir calculé les limites en $1, +\infty$) ; mais on peut aussi simplement résoudre l'équation suivante d'inconnue r : $r + \frac{1}{r} = 2x$, ou encore $r^2 - 2xr + 1 = 0$. Le discriminant de ce trinôme est $4x^2 - 4 \geq 0$, ce qui montre que l'équation a des solutions
$$r_{\pm} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$
(qui sont confondues dans le cas où le discriminant est nul, c'est-à-dire $x = 1$). En particulier, $r = x + \sqrt{x^2 - 1}$ est une solution non nulle de notre équation.

13. Soit $x \in [1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$. Avec $r = x + \sqrt{x^2 - 1}$, les résultats des questions précédentes nous montrent que $T_n(x) = \dfrac{r^n + r^{-n}}{2}$. On vérifie que $u + \dfrac{1}{u} \geq 2$ pour tout $u > 0$ (par étude de fonction, ou en multipliant les deux côtés de l'inégalité par u et en formant leur différence). Par ailleurs, on a $r \geq 1$, donc $r^{-n} \leq 1 \leq r^n$, d'où $\dfrac{r^n + r^{-n}}{2} \leq r^n$. Le fait que $T_n(x) = \dfrac{r^n + r^{-n}}{2}$ donne alors $T_n(x) \leq r^n$. On a donc bien obtenu que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \geq 1$,

$$1 \leq T_n(x) \leq (x + \sqrt{x^2 - 1})^n \ .$$

14. Pour tout $t \in [0, \pi]$ on a vu que $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$, ce qui, en dérivant, nous donne

$$\forall t \in [0, \pi] \quad -\sin(t) T_n'(\cos(t)) = -n \sin(nt) \ .$$

En dérivant une fois de plus, on obtient

$$\forall t \in [0, \pi] \quad -\cos(t) T_n'(\cos(t)) + \sin^2(t) T_n''(\cos(t)) = -n^2 \cos(nt) \ .$$

Pour $x \in [-1, 1]$, on obtient en appliquant l'égalité précédente pour $t = \arccos(x)$ que

$$-x T_n'(x) + (1 - x^2) T_n''(x) = -n^2 T_n(x) \ , \qquad \text{ou encore} \quad (1 - x^2) T_n''(x) - x T_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0 \ .$$

15. L'équation ci-dessous est une égalité entre fonctions polynomiales : si elle est vraie sur $[-1, 1]$, alors elle doit être vraie sur $\mathbb{R}$, par le même raisonnement que celui qu'on a utilisé à la question 5.

16. La fonction $h \colon x \mapsto f(x) g(x) \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ est continue sur $]-1, 1[$; l'intégrale est généralisée en 1 et en -1. En 1, on a $\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{(1 - x)(1 + x)} \sim \sqrt{2}\sqrt{1 - x}$. De plus, fg est une fonction continue sur $[-1, 1]$, donc elle y est majorée par un réel M ; on obtient donc que, au voisinage de 1, $|h|$ est majorée par la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{1 - x}}$, qui est intégrable d'après le critère de Riemann. Par conséquent, l'intégrale converge absolument en 1. Le même raisonnement s'applique, mutatis mutandis, en -1. On en déduit que h est intégrable sur $]-1, 1[$.

17. D'après le résultat de la question précédente, cette application est bien définie. Pour vérifier que c'est un produit scalaire, on doit vérifier :
   - Que φ est à valeurs positives, ce qui est immédiat, puisque $\varphi(f, f)$ est l'intégrale d'une fonction positive, pour toute $f \in E$.
   - Que $\varphi(f, f) = 0$ entraîne $f = 0$. Pour cela, il suffit de remarquer que $\varphi(f, f)$ est l'intégrale d'une fonction positive et continue sur $]-1, 1[$, et ne peut donc être nulle que si la fonction en question est elle-même nulle sur $]-1, 1[$, c'est-à-dire si f est nulle sur $]-1, 1[$. Comme f est polynomiale, on en déduit qu'elle est nulle sur $\mathbb{R}$.
   - Que φ est symétrique, ce qui est immédiat : $\varphi(f, g) = \varphi(g, f)$.
   - Que φ est bilinéaire :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2) &= \int_{-1}^{1} (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))(\mu_1 g_1(x) + \mu_2 g_2(x)) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \lambda_1 \mu_1 \varphi(f_1, g_1) + \lambda_1 \mu_2 \varphi(f_1, g_2) + \lambda_2 \mu_1 \varphi(f_2, g_1) + \lambda_2 \mu_2 \varphi(f_2, g_2) \ . \end{aligned}$$

18. Procédons par récurrence ; on n'a guère d'autre choix que d'imposer $p_0 = 1$. Supposons (p_k) construite jusqu'au rang $n - 1$ ($n \geq 1$) ; alors $(p_k)_{1 \leq k \leq n-1}$ forme une base orthogonale de l'espace $En - 1$, qui est de dimension n. Alors $E_{n-1}^{\perp}$ est de dimension 1 dans E_n, et contient donc un vecteur non nul P, qui est nécessairement de degré n (puisqu'il n'appartient pas à E_{n-1}. En multipliant P par une constante non nulle, on peut faire en sorte que son coefficient dominant soit 1, et poser $p_n = P$.

19. On a déjà vu qu'une telle famille existe ; montrons qu'elle est unique. Pour cela, supposons avoir montré qu'il n'existe qu'une seule famille $(Q_k)_{k \leq n}$ vérifiant les conditions de l'énoncé jusqu'au rang $n \geq 0$ (on a déjà vu que pour $n = 0$ on a nécessairement $Q_0 = 1$, ce qui initialise notre récurrence). Soit P, Q deux polynômes tels que les suites $(Q_0, \ldots, Q_n, P)$ et $(Q_0, \ldots, Q_n, Q)$ satisfassent les

conditions. Le raisonnement de la question précédente montre que P et Q sont proportionnels (puisqu'ils appartiennent à l'orthogonal de E_{n-1} dans E_n, qui est de dimension 1) ; comme de plus P et Q ont le même coefficient dominant, ils sont nécessairement égaux, ce qui nous permet de conclure par récurrence.

20. La fonction $x \mapsto \arccos(x)$ étant une bijection de classe C^1 de $]-1,1[$ sur $]0,\pi[$, on peut utiliser le changement de variable $u = \arccos(x)$ et obtenir que

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{\arccos(n\cos(x))\arccos(m\cos(x))}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi} \cos(nu)\cos(mu)\,du\ .$$

Pour calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(nu)\cos(mu)\,du$, on peut passer en complexes, ou directement linéariser à l'aide de la formule $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$, qui nous donne

$$\int_0^{\pi} \cos(nu)\cos(mu)\,du = \int_0^{\pi} \frac{\cos((n+m)u)+\cos((n-m)u)}{2}\,du.$$

Reste à calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(ku)\,du$ pour $k \in \mathbb{Z}$; si k est nul cette intégrale vaut π, sinon elle vaut $\left[\dfrac{\sin(ku)}{k}\right]_0^{\pi} = 0$. On obtient donc finalement que

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \\ \pi & \text{si } n = m = 0 \end{cases}\ .$$

Par conséquent, la suite (T_n) forme une famille orthogonale telle que $T_n \in E_n$ pour tout n ; le coefficient dominant de T_n étant 2^{n-1}, on obtient que $Q_n = 2^{1-n}T_n$.

Problème 2.
Préliminaires.

1. Il faut corriger l'énoncé et supposer que c'est $h_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ qui converge simplement vers g.Chaque h_n est continue par morceaux, à valeurs positives, et (h_n) converge simplement vers g avec $h_n(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in J$. Comme g est intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée, et obtenir que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_J \left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right) dx = \lim_{n\to+\infty} \int_J h_n(x)\,dx = \int_J g(x)\,dx \ .$$
Comme on a $\displaystyle\int_J \left(\sum_{k=0}^{n} f_n(x)\right) dx = \sum_{k=0}^{n} \int_J f_k(x)\,dx$ pour tout n par linéarité de l'intégrale, on vient d'obtenir que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \int_J f_k(x)\,dx = \int_J g(x)\,dx$.

2. Pour $x \in]0,1[$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x) = \frac{1-x}{1-x^2}$ (somme des termes d'une série géométrique), donc
$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x)\right) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2) \ .$$
Comme la série de fonctions intégrées est à valeurs positives et $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est continue, on peut appliquer le théorème précédent (avec $J =]0,1[$) et obtenir que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,dx = \ln(2)$. Un calcul immédiat nous donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,dx = \int_0^1 (x^{2n} - x^{2n+1})\,dx = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} \ .$$
Par conséquent, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) = \ln(2)$. Ceci nous donne
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2) \ .$$
(Pour justifier complètement cette égalité, on peut noter que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le théorème des séries alternées ; et pour tout $N \geq 1$ on a
$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right)$$
donc les deux séries ont la même limite)

3. On pose de nouveau, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n = \sum_{k=0}^{n} f_n(x)$; l'inégalité triangulaire nous donne que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in J$ on a $|h_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(x)|$, qui est intégrable par hypothèse. Comme les (h_n) sont continues et convergent normalement vers g, g est continue aussi. On peut maintenant appliquer le théorème de convergence dominée, ce qui nous donne que g est intégrable et $\displaystyle\int_J g(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_J f_n(x)\,dx$.

Partie I.

1. En 0, on a $\arctan(t) \sim t$ et $e^{\pi t} - 1 = 1 + \pi t - 1 + o(t) = \pi t + o(t) \sim \pi t$. On en déduit donc que
$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(t) = \frac{1}{\pi}$$
Ceci montre que la fonction φ se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = \frac{1}{\pi}$.
2. Le fonction φ est un quotient de fonctions dérivables, dont le dénominateur ne s'annule pas, donc φ est dérivable. En appliquant la formule de dérivation d'un quotient, on obtient
$$\varphi'(t) = \frac{1}{(e^{\pi t}-1)^2}\left(\frac{e^{\pi t}-1}{1+t^2} - e^{\pi t}\arctan(t)\right) = \frac{e^{\pi t}}{(e^{\pi t}-1)^2(1+t^2)}\left(1 - e^{-\pi t} - \pi(1+t^2)\arctan(t)\right) .$$
3. La factorisation qu'on vient d'obtenir pour $\varphi'(t)$ montre que ce qui est important pour comprendre les variations de φ est de déterminer le signe de la fonction ψ définie par $\psi(t) = 1 - e^{-\pi t} - \pi(1 + t^2)\arctan(t)$. Cette fonction est dérivable, et on a
$$\psi'(t) = \pi e^{-\pi t} - \pi - 2\pi t \arctan(t) .$$
Par conséquent, $\psi'(t) < 0$ pour tout $t > 0$, ce qui montre que ψ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Comme $\psi(0) = 0$, on obtient que $\psi(t) < 0$ pour tout $t < 0$, donc il en va de même pour $\varphi'(t)$ et on obtient que φ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.
4. Puisque φ est décroissante, la borne supérieure de la fonction φ sur $]0, +\infty[$ est égale à $\lim_{x\to 0^+} \varphi(t) = \frac{1}{\pi}$.
5. La fonction φ se prolonge par continuité en 0, donc le problème de convergence de I ne se pose qu'en $+\infty$. La fonction φ est à valeurs positives, et $\arctan(t) \to \frac{\pi}{2}$ quand t tend vers $+\infty$. Par conséquent, en $+\infty$ on a $\varphi(t) \sim \frac{\pi}{2} e^{-\pi t}$, et cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$ (d'intégrale égale à $\frac{1}{2}$). On en déduit que I est une intégrale convergente.
6. Pour tout $t > 0$, on a
$$\frac{1}{e^{\pi t}-1} = e^{-\pi t}\frac{1}{1-e^{-\pi t}} = e^{-\pi t}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\pi t} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n\pi t} .$$
Donc la série de fonctions de terme général $\arctan(t)e^{-n\pi t}$ (pour $n \geq 1$) converge simplement vers $\varphi(t)$, et ces fonctions sont à valeurs positives. Comme φ est intégrable sur $]0, +\infty[$, on peut appliquer le résultat de la première question du premier problème, et obtenir
$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-n\pi t}\arctan(t)\,dt .$$
Pour obtenir la deuxième égalité, fixons $n \geq 1$ et faisons une intégration par parties (les fonctions qui interviennent sont bien de classe C^1) ; pour cela, pour éviter des erreurs, fixons $M > 0$ (qu'on fera ensuite tendre vers $+\infty$) et calculons
$$\int_0^M e^{-n\pi t}\arctan(t)\,dt = \left[\frac{-e^{-n\pi t}\arctan(t)}{n\pi}\right]_0^M + \int_0^M \frac{e^{-n\pi t}}{n\pi(1+t^2)}\,dt .$$
En faisant tendre M vers $+\infty$, on obtient que $\int_0^M e^{-n\pi t}\arctan(t)\,dt = \frac{1}{n\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-n\pi t}}{1+t^2}\,dt$.
En reportant cela dans l'égalité obtenue précédemment pour I, on obtient finalement
$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-n\pi t}}{1+t^2}\,dt .$$

Partie II.

1. Pour $x < 0$, la fonction $\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, par conséquent $f(x)$ n'est pas définie si $x < 0$. Si $x \geq 0$, on a par contre $0 \leq \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$, qui est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$. Comme $x \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue pour tout t, les hypothèses sont réunies pour appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres (qui suit facilement du théorème de convergence dominée rappelé au début du problème). On voit donc que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
2. Ici on peut raisonner par convergence dominée, ou directement utiliser un encadrement : pour tout $x > 0$ on a
$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x} \ .$$
On en déduit que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
En général, on peut traiter ce genre de questions en utilisant le théorème de convergence dominée, de la façon suivante : considérons une suite (x_n) qui converge vers $+\infty$, et la suite $h_n \colon t \mapsto \dfrac{e^{-x_n t}}{1+t^2}$. La suite h_n converge simplement vers la fonction nulle, et est dominée par la fonction intégrable $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$; le théorème de convergence dominée nous permet donc de conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(t)\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Autrement dit, $f(x_n)$ tend vers 0 et, la suite (x_n) étant une suite quelconque tendant vers $+\infty$, on conclut que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
3. Fixons $a > 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$ et tout $t > 0$, on a
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right) = -t\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \ .$$
De plus, $\left|\dfrac{te^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq e^{-at}$ pour tout $x \in]a, +\infty[$, et $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On peut donc appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres et conclure que f est dérivable sur $]a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, de dérivée égale à $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -t\frac{e^{-xt}}{1+t^2}$. En appliquant le même raisonnement, on obtient que f' est dérivable sur $]a, +\infty[$, de dérivée égale à $f''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\frac{e^{-xt}}{1+t^2}$.
Les formules précédentes étant valides sur $]a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, elles le sont en fait sur $]0, +\infty[$ et on a en particulier, pour tout $x \in]0, +\infty[$,
$$f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x} \ .$$
4. Soit $x > 0$ et $y \geq x$. Par intégration par parties, on a
$$S_x(y) = \int_x^y \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_x^y - \int_x^y \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt \ .$$
Puisque $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$ par comparaison à une intégrale de Riemann, on obtient que $S_x(y)$ tend vers $\cos(1) - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$ quand y tend vers $+\infty$. On montre de la même façon que $C_x(y)$ a une limite quand y tend vers $+\infty$.
5. Par la relation de Chasles, on a pour tout $x > 0$ que $g(x) + \displaystyle\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt = g(1)$. Le théorème fondamental de l'analyse nous dit que $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, de dérivée

$\dfrac{\sin(x)}{x}$. On obtient donc que g est dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée $-\dfrac{\sin(x)}{x}$. De la même façon, on obtient que h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x) = -\dfrac{\cos(x)}{x}$.

Par définition de la convergence d'une intégrale généralisée on a que $g(x)$ et $h(x)$ tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

6. Soit λ, μ deux réels et $k\colon x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$. Si $k(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, alors $k(2n\pi) = \lambda$ tend vers 0, donc $\lambda = 0$; de même, $k(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \mu$ tend vers 0, donc $\mu = 0$.

   Réciproquement, il est bien clair que si $\lambda = \mu = 0$ alors $\lambda\cos(x) + \mu\cos(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

7. On commence par résoudre l'équation $y'' + y = 0$: ses solutions sont de la forme $x \mapsto \lambda_1\cos(x) + \lambda_2\sin(x)$.

   Puis on applique la méthode de la variation de la constante pour résoudre l'équation $y'' + y' = \dfrac{1}{x}$, et on cherche y sous la forme $x \mapsto \lambda_1(x)\cos(x) + \lambda_2(x)\sin(x)$, avec la condition (suggérée par l'énoncé) $\lambda_1'\cos + \lambda_2'\sin = 0$. Ceci nous donne $y'(x) = -\lambda_1(x)\sin(x) + \lambda_2(x)\cos(x)$ pour tout $x > 0$; en dérivant une fois de plus, on obtient $y''(x) = -\lambda_1'(x)\sin(x) - \lambda_1(x)\cos(x) + \lambda_2'(x)\cos(x) - \lambda_2(x)\sin(x)$, ce qui donne $y(x) + y''(x) = -\lambda_1'(x)\sin(x) + \lambda_2'(x)\cos(x)$.

   Finalement, on obtient que y est solution dès que λ_1, λ_2 vérifient

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad \begin{cases} \lambda_1'(x)\cos(x) + \lambda_2'(x)\sin(x) & = 0 \\ -\lambda_1'(x)\sin(x) + \lambda_2'(x)\cos(x) & = \frac{1}{x} \end{cases}$$

   En résolvant ce système, on obtient $\lambda_1'(x)(\cos^2(x) + \sin^2(x)) = -\dfrac{\sin(x)}{x}$, donc $\lambda_1'(x) = g'(x)$; et $\lambda_2'(x) = -\dfrac{\cos(x)}{x} = h'(x)/$

   Une solution particulière du système est donc $x \mapsto g(x)\cos(x) - h(x)\sin(x)$, et les solutions générales sont de la forme

$$x \mapsto (A + g(x))\cos(x) + (B - h(x))\sin(x) \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R} .$$

8. En particulier, f est de la forme ci-dessus ; comme $\lim f(x) = 0$ quand x tend vers $+\infty$, on doit avoir $f(x) = g(x)\cos(x) - h(x)\sin(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. Ceci donne :

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)\cos(x) - \cos(t)\sin(x)}{t}\, dt = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\, dt$$

   En utilisant le changement de variables affine $u = t - x$, on obtient finalement

$$\forall x > 0 \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u+x}\, du .$$

   Le changement de variables affine (et bijectif car $x > 0$) $u = xt$ nous donne

$$\forall x > 0 \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t}\, dt .$$

9. On sait que f est continue en 0, et $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$. Il nous reste à montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u+x}\, du$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\, dt$ quand x tend vers 0. On ne peut hélas pas appliquer directement de théorème de continuité des intégrales à paramètres (on n'a pas de fonction de domination) mais, pour $x > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u+x}\, du - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\, du = -x\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u(x+u)}\, du$$

Pour $\varepsilon > 0$, on a donc pour tout $x > 0$ que

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u+x}\, du - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\, du\right| &\leq x\left(\left|\int_0^{\varepsilon} \frac{\sin(u)}{u(x+u)}\, du\right| + \left|\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u(x+u)}\, du\right|\right) \; . \\ &\leq \left|\int_0^{\varepsilon} \frac{\sin(u)}{u}\, du\right| + x\left|\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u(x+u)}\, du\right|\end{aligned}$$

Le terme de gauche tend vers 0 quand ε tend vers 0 (puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ se prolonge par continuité en 0) et, à ε fixé, on peut appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres au terme de droite. Par conséquent,

$$\lim_{x \to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u+x}\, du - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\, du = 0 \; .$$

Ceci permet finalement de conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\, du = f(0) = \frac{\pi}{2}$.

10. En reprenant les notations de l'énoncé, on a vu que $I = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} f(k\pi)$, ce qui nous donne :

$$I = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(k\pi t)}{1+t}\, dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ku)}{\pi+u}\, du$$

(la dernière égalité vient du changement de variables affine $u = \pi t$)

11. En utilisant la même intégration par parties que précédemment, on obtient

$$I = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(u+\pi)^2} \frac{\cos(ku)}{k^2}\, du \right) \; .$$

Puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, on peut séparer les deux sommes et obtenir

$$I = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(u+\pi)^2} \frac{\cos(ku)}{k^2}\, du \right) \; .$$

Enfin, on peut utiliser le fait que le série de fonctions apparaissant ci-dessus converge absolument pour échanger série et intégrale, et obtenir

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(u+\pi)^2} \frac{\cos(ku)}{k^2}\, du \right) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(u+\pi)^2} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(ku)}{k^2} \right) du \; . \end{aligned}$$