Ecrit blanc d'analyse, 26 janvier 2015, durée 5h.

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

Les problèmes ci-dessous sont indépendants. **Le problème 3 ne fait pas partie du sujet et ne doit pas être traité pendant l'épreuve. Il n'est inclus ici que pour permettre des approfondissements lors d'un travail personnel.**

Problème 1. Préliminaires : le lemme de Cesàro.

Dans cette partie, on fixe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels qui converge vers un réel l.

1. Montrer que, pour toute paire d'entiers (n_0, n) tels que $n_0 < n$, on a
$$\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - l\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} |u_k - l| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k - l| \ .$$
2. Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant l'inégalité de la question précédente, montrer qu'il existe N tel que $\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - l\right| \leq 2\varepsilon$ pour tout $n \geq N$.
3. Montrer que la suite $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l quand n tend vers $+\infty$ (*cet énoncé est appelé lemme de Cesàro*).
4. Application : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tels que $u_{n+1} - u_n$ tend vers $l \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Donner un équivalent simple de (u_n) quand n tend vers $+\infty$.
5. Que peut-on dire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 ?

Dans toute la suite de l'énoncé, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels tels que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ait un rayon de convergence égal à 1. On désigne par f la fonction définie sur $]-1, 1[$ par la formule $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et par (P_1) et (P_2) les deux propriétés suivantes possibles de la suite (a_n) :

(P_1) : la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

(P_2) : la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 (par valeurs inférieures).

Le but du problème est de montrer que (P_1) împlique (P_2) (théorème d'Abel) puis de voir une hypothèse supplémentaire sous laquelle la réciproque est vraie.

Partie I : Généralités.

1. Donner des exemples de suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant les conditions de l'énoncé et vérifiant : (P_1) et (P_2) ; (P_2) mais pas (P_1) ; ni (P_1) ni (P_2).

2. On suppose que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est absolument convergente. Montrer qu'alors la série définissant f converge normalement sur $[-1,1]$ et que l'on a $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3. Déduire de la question précédente la somme de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

Partie II : Théorème d'Abel.

1. On suppose dans cette question que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge. On pose $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et, pour tout $x \in [0,1]$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$.

   (a) Simplifier, pour tout $x \in [0,1[$, l'expression $\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p}$.

   (b) En déduire que, pour tout $x \in [0,1[$, $R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{p-1}$.

   (c) Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$ et tout entier naturel p on ait $|r_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, puis que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout $x \in [0,1[$ on a $|R_n(x)| \leq \varepsilon$.

   (d) Montrer que l'on a $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

2. Retrouver le développement en série entière de $x \mapsto \arctan(x)$, puis utiliser le théorème d'Abel pour écrire $\frac{\pi}{4}$ comme somme d'une série numérique.

Partie III. Réciproque du théorème d'Abel ; un théorème taubérien.

On a déjà observé que la réciproque du théorème d'Abel est fausse en général ; dans cette partie on prouve qu'elle devient vraie si l'on suppose que a_n est négligeable devant $\frac{1}{n}$; c'est le premier exemple de « théorème taubérien », ainsi nommé en l'honneur de son auteur, A. Tauber.

1. Donner un exemple de suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $b_n = o(\frac{1}{n})$ mais $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge.

   Dans la suite de cette partie, on suppose que $a_n = o(\frac{1}{n})$.

2. On pose $M_n = \sup_{k>n} |k a_k|$. Montrer que $M_n \to 0$ quand n tend vers $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout entier $k \geq 1$, on a $1 - x^k \leq k(1-x)$.

4. Montrer que, pour tout $x \in [0,1[$ et tout entier n, on a

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k - f(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|(1-x^k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| x^k \ .$$

5. En déduire que , pour tout $x \in [0,1[$ et tout entier n, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - f(x)\right| \leq (1-x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{M_n}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \ .$$

On suppose dans la suite de cette partie que $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ *existe (dans* $\mathbb{R}$*)*

6. Montrer que $\dfrac{M_n}{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^k$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
7. Montrer que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k|a_k|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
8. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{x\to 1^-} f(x)$.

Problème 2.

Dans ce problème, on utilise la terminologie et les notations ci-dessous :

- On note $C(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
- On note $L^1(\mathbb{R})$ l'espace formé par les fonctions f telles que $f \in C(\mathbb{R})$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge. On note alors $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$.
- On note $L^2(\mathbb{R})$ l'espace formé par les fonctions f telles que $f \in C(\mathbb{R})$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx$ converge. On note alors $\|f\|_2 = \left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$.
- On note $C_b(\mathbb{R})$ l'espace formé par les fonctions bornées appartenant à $C(\mathbb{R})$. Si $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est bornée, on notera $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x))|\colon x\in\mathbb{R}\}$.
- On dit qu'une fonction $f \in C(\mathbb{R})$ est *à support compact* s'il existe $A \geq 0$ tel que f soit nulle en dehors du segment $[-A, A]$.
- Lorsque $f, g \in C(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$ sont telles que $t \mapsto f(t)g(x-t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt \ .$$

La fonction $f * g$ est appelée *produit de convolution* de f par g.

Partie I : Généralités.

1. Dans chacun des deux cas suivants, montrer que $f*g$ est définie sur $\mathbb{R}$, bornée, et donner une majoration de $\|f*g\|_\infty$:
   (a) $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in C_b(\mathbb{R})$.
   (b) $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ (on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour montrer que $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_2\,\|g\|_2$).
2. Soit $f, g \in C(\mathbb{R})$ telles que $f*g(x)$ soit défini pour tout $x\in\mathbb{R}$. Montrer qu'alors $f*g = g*f$.
3. Montrer que, si f et g appartiennent à $C(\mathbb{R})$ et sont à support compact, alors $f*g$ est à support compact.

Partie II : produit de convolution d'éléments de $L^2(\mathbb{R})$.
Dans cette partie, on suppose que f et g appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$.
Pour toute fonction $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et tout réel α, on définit une nouvelle fonction $T_\alpha(h)$ en posant $T_\alpha(h)(x) = h(x-\alpha)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'une fonction h est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si,
$$\lim_{\alpha \to 0} \|T_\alpha(h) - h\|_\infty = 0 \ .$$
2. Montrer que, pour tout réel α, on a
$$\|T_\alpha(f*g) - f*g\|_\infty \leq \|T_\alpha(f) - f\|_2 \|g\|_2 \ .$$
3. (a) Montrer que, si f est à support compact, alors $\|T_\alpha(f) - f\|_2$ tend vers 0 quand α tend vers 0 (on pourra par exemple utiliser un théorème de continuité des intégrales à paramètres).

   (b) Montrer que, si f est à support compact, alors $f*g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

   (c) Montrer qu'il existe une suite de fonctions continues $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans $[0,1]$, telles que pour tout n on ait
$$\forall x \in [-n,n] \ k_n(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \ |x| \geq n+1 \Rightarrow k_n(x) = 0 \ .$$
   Dans la suite de cette partie on fixe une telle suite (k_n), et on définit une suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}$ en posant $f_n(x) = k_n(x)f(x)$.

   (d) Montrer que (f_n) est une suite d'élements de $C_b(\mathbb{R})$ et que $\|f_n - f\|_2$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

   (e) Montrer que $\|f_n * g - f*g\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et en déduire que $f*g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Partie III. Convolution et théorème de Weierstrass.
Dans cette partie, on définit une suite de fonctions $h_n\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty[$ en posant
$$h_n(t) = \begin{cases} \dfrac{(1-t^2)^n}{\lambda_n} & \text{si } t \in [-1,1], \text{ où } \lambda_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases} .$$

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_n(t)\,dt = 1$ et que pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} h_n(t)\,dt = 0 = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} h_n(t)\,dt \ .$$
   Indication : Pour le dernier point, on pourra commencer par montrer que $\lambda_n \geq \frac{1}{n+1}$ pour tout n.

   (b) Montrer que, si f est une fonction continue à support inclus dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, alors $f*h_n$ est une fonction polynomiale sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et nulle en dehors de l'intervalle $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.

2. Dans cette question on fixe $f \in C_b(\mathbb{R})$.
   (a) On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer que pour tout $\delta > 0$ il existe n_0 tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq n_0$ on ait
$$\left|\int_{-\infty}^{-\delta} f(x-t)h_n(t)\,dt\right| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \left|\int_{\delta}^{+\infty} f(x-t)h_n(t)\,dt\right| \leq \varepsilon\ .$$
   (b) Montrer que $f * h_n$ converge simplement vers f (on pourra utiliser judicieusement le fait que, pour tout $\delta > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\delta}^{\delta} h_n(t)\,dt = 1$).
   (c) Montrer que, si f est uniformément continue, alors $f * h_n$ converge uniformément vers f quand n tend vers $+\infty$.
3. Donner une preuve du théorème de Weierstrass : si f est une fonction à valeurs complexes et continue sur un segment I de $\mathbb{R}$, alors f est limite uniforme (sur I) de fonctions polynomiales.
4. Existe-t-il une fonction $g \in C_b(\mathbb{R})$ et telle que $f * g = f$ pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$?
5. Montrer que la conclusion du théorème de Weierstrass devient fausse en général si on ne suppose pas que I est un segment.

Problème 3 (Théorème de Littlewood.). **Ce problème, qui continue le problème 1, ne FAIT PAS PARTIE DU SUJET ET N'EST PAS A TRAITER PENDANT L'EPREUVE. Il est là pour fournir un prolongement à ceux qui voudraient continuer à réfléchir chez eux aux théorèmes de type taubérien.**

On va maintenant montrer un théorème taubérien plus fort que le précédent, dû à J.E. Littlewood. On conserve les mêmes notations que dans le premier problème, mais on suppose cette fois seulement que $a_n = O(\frac{1}{n})$ quand n tend vers $+\infty$. On suppose aussi que $f(x) \to 0$ quand $x \to 1^-$.

Dans la suite, on note g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(x) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & si\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$, et on appelle $\mathcal{E}$ l'espace formé par toutes les fonctions $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que :

(i) $\forall x \in [0,1[\ \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\varphi(x^n)$ converge.

(ii) $\lim_{x\to1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\varphi(x^n) = 0$.

On va montrer que g appartient à $\mathcal{E}$, et en déduire que (sous nos hypothèses) que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$.

1. Montrer que g satisfait la condition (i) ci-dessus.
2. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel (pour les lois usuelles).
3. (a) Montrer que, pour tout $m \geq 1$, la fonction définie sur $[0,1]$ par $x \mapsto x^m$ appartient à $\mathcal{E}$.
   (b) Montrer que pour tout polynôme $p \in \mathbb{R}[X]$ de coefficient constant nul, la fonction polynomiale sur $[0,1]$ associée à p appartient à $\mathcal{E}$.

4. Etant donné $q \in \mathbb{R}[X]$, démontrer l'égalité

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n) = \int_0^1 q(t)\, dt \ .$$

(On pourra commencer par traiter le cas où $q(X) = X^m$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$).

5. Pour $x \in]0,1[$, on pose $h(x) = \dfrac{g(x) - x}{x(1-x)}$. Représenter le graphe de h ; montrer que h se prolonge par continuité en 0 et en 1 et que la fonction ainsi obtenue est continue par morceaux sur $[0,1]$.

   On rappelle que, étant donnée une fonction ψ continue par morceaux sur $[0,1]$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ deux fonctions continues s_1, s_2 telles que $s_1 \leq \psi \leq s_2$ sur $[0,1]$ et $\int_0^1 (s_2(x) - s_1(x))\, dx \leq \varepsilon$.

   On rappelle aussi le théorème de Weierstrass : étant donné une fonction ψ continue sur $[0,1]$, et $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $p \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\sup_{x \in [0,1]} |p(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon$.

6. On fixe $\varepsilon > 0$.

   (a) En utilisant les deux théorèmes rappelés ci-dessus, montrer qu'il existe deux polynômes $u_1, u_2 \in \mathbb{R}[X]$, tels que $u_1 \leq h \leq u_2$ sur $[0,1]$ et $\int_0^1 (u_2(x) - u_1(x))\, dx \leq 3\varepsilon$.

   (b) On pose $p_1(x) = x + x(1-x)u_1(x)$, $p_2(x) = x + x(1-x)u_2(x)$ et $q(x) = \dfrac{p_2(x) - p_1(x)}{x(1-x)}$.

   Montrer que $p_1(0) = p_2(0)$, $p_1(1) = p_2(1) = 1$, et $\int_0^1 q(x)\, dx \leq 3\varepsilon$.

   (c) On pose $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} |na_n|$. En utilisant le fait que $1 - x^n \leq n(1-x)$ pour tout entier n, montrer que

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n) \right| \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} (1 - x^n) q(x^n) \leq M(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n q(x^n) \ .$$

   (d) Prouver que $g \in \mathcal{E}$.

7. (a) Montrer que pour tout n il existe $\delta \in]0,1[$ tel que

$$x \in [1-\delta, 1] \Rightarrow \forall k \in \{0, \ldots, n\} x^k \in [\frac{1}{2}, 1] \ .$$

   (b) En utilisant le fait démontré ci-dessus et le fait que $g \in \mathcal{E}$, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge et vaut 0.

8. Que pouvez-vous dire sur les résultats obtenus dans ce problème dans le cas où (a_n) est une suite de nombres complexes ?