Ecrit blanc, 9 mars 2015, durée 5h : Problèmes d'Analyse.

L'usage des calculatrices est autorisé. L'usage de tout autre appareil électronique, en particulier les téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc).

Problème 1.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. On dit que $f\colon I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur I lorsque

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall (x,y) \in I^2 \ |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \ .$$

1. Ecrire à l'aide de quantificateurs la proposition « f n'est pas uniformément continue sur I ».
2. Soit F une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On se propose de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on ait $f(x) \leq ax + b$.
   (a) Justifier l'existence d'un réel $a > 0$ tel que pour tous x, y positifs on ait
   $$|x-y| \leq a \Rightarrow |F(x)-F(y)| \leq 1 \ .$$
   (b) Etant donné $x_0 \in \mathbb{R}^+$, justifier qu'il existe un plus petit entier n_0 tel que $\dfrac{x_0}{a} \leq n$; exprimer n en fonction de x_0 et a.
   (c) Montrer que $|F(x_0) - F(a)| \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} \left| F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right) \right|$.
   (d) Conclure.
3. Dans cette question, on souhaite établir le théorème de Heine : si f est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, alors f est uniformément continue sur $[0,1]$. On raisonne par l'absurde, et on suppose que f est continue sur $[0,1]$ mais n'y est pas uniformément continue.
   (a) Montrer l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ et de deux suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $[0,1]$ tels que
   $$\forall n \geq 1 \quad |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \ .$$
   (b) Justifier qu'il existe deux sous-suites $(x_\varphi(n))$ et $(y_{\varphi(n))}$ convergentes et telles que pour tout $n \geq 1$ on ait à la fois
   $$|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon \ .$$
   (c) Conclure.

Problème 2.

Dans tout le problème, $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de nombres complexes et $\sum a_n z^n$ la série entière associée, dont le rayon de convergence R_a est supposé non nul et fini.
On note C_a l'ensemble des nombres complexes z de module R_a tels que $\sum a_n z^n$ soit convergente.

Partie A. Calculs préliminaires.

1. Montrer les inégalités suivantes :
   $$\forall x \in [0,\pi] \ 0 \leq \sin x \leq x \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \ \sin(x) \geq \frac{2}{\pi} x \ .$$
2. Montrer que pour tout x qui appartient à $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et pour tout couple d'entiers naturels (p,q) tels que $p \leq q$, on a
   $$\left| \sum_{k=p}^{q} e^{ikx} \right| \leq \left| \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right| \ .$$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On note $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum v_n$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.
   (a) Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (p, q) tel que $0 \leq p \leq q-1$, on a
   $$\sum_{k=p+1}^{q} u_k v_k = \sum_{k=p+1}^{q-1} (u_k - u_{k+1})V_k + u_q V_q - u_{p+1} V_p \ .$$
   (b) On suppose que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, que (u_n) tend vers 0 et que la série $\sum |u_k - u_{k+1}|$ est convergente. Montrer que la série $\sum u_n v_n$ est convergente.
   (c) On suppose que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0. Montrer que la série $\sum u_n v_n$ est convergente.
   (d) Déduire des questions précédentes que pour tout x qui appartient à $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ les séries $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{k}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ sont convergentes.
   Que dire pour un réel x qui appartient à $2\pi\mathbb{Z}$?

Partie B. Quelques exemples.

1. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $b_n = a_n(R_a)^n$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n z^n$ est $R_b = 1$ et qu'un complexe z appartient à C_a si, et seulement si, $\frac{z}{R_a}$ appartient à C_b.
   On se ramène ainsi à l'étude des séries entières de rayon de convergence égal à 1.
2. On suppose dans cette question que $\sum |a_n|$ est convergente et que $R_a = 1$.
   (a) Déterminer C_a.
   (b) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \colon \begin{cases} [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} \\ x \mapsto a_n e^{inx} \end{cases}$.
   Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$ vers une fonction continue sur $[-\pi, \pi]$.
   (c) Donner un exemple de série entière $\sum a_n z^n$ pour laquelle C_a est le cercle unité.
3. Donner un exemple de série entière $\sum a_n z^n$ pour laquelle $R_a = 1$ et C_a est vide.
4. On suppose dans cette question qu'il existe un nombre complexe z_0 de module 1 tel que $\sum a_n z_0^n$ converge mais $\sum |a_n|$ diverge.
   (a) Montrer qu'alors $R_a = 1$.
   (b) Soit ξ un nombre complexe de module 1. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{(n+1)\xi^{n+1}}$, montrer que C_a est le cercle unité privé d'un point à déterminer.
   (c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et p complexes $\xi_1, \ldots, \xi_p$ distincts et de module 1. Construire un exemple de série entière $\sum a_n z^n$ pour laquelle C_a est le cercle unité privé des p points $\xi_1, \ldots, \xi_p$.
   (d) On suppose que $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{\cos(n)}{n}$ pour tout $n \geq 1$. Déterminer R_a et C_a. La série $\sum |a_n|$ est-elle convergente ?

Partie C. Un exemple pour lequel C_a est le cercle unité et $\sum |a_n|$ diverge.

Dans cette partie, on définit la suite (a_n) de la façon suivante : $a_0 = 0$; et pour tout entier naturel non nul p, pour tout entier naturel n tel que $p^2 \leq n < (p+1)^2$, $a_n = \frac{(-1)^p}{p^2}$.

1. Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente et que la série $\sum |a_n|$ est divergente.
2. Calculer $a_{n+1} - a_n$ (on distinguera suivant les valeurs de n) et montrer que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ est convergente.
3. Montrer que $R_a = 1$ et que C_a est le cercle unité.