L3 Mathématiques — Printemps 2009/2010
Fonctions d'une Variable Complexe — J. Melleray

Quelques exercices corrigés pour préparer le partiel du 20 avril.

Exercice 1.2.9 On va simplement corriger la deuxième question, la première en étant un cas particulier (avec $\Psi(x,y) = ax + by + c$)

i) Notons $Df_{(x,y)}$ la différentielle de f (vue comme une fonction définie sur $U \subseteq \mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$) en un point $(x,y) \in U$. L'application $F = \Psi \circ f$ est constante sur U, donc sa différentielle est nulle en tout point $(x,y) \in U$; d'après la règle de la chaîne, cette différentielle vaut

$$DF_{(x,y)} = D\Psi_{f(x,y)} \circ Df_{(x,y)} \; .$$

On a donc, pout tout $(x,y) \in U$, $D\Psi_{f(x,y)} \circ Df_{(x,y)} = 0$. Si jamais $Df_{(x,y)}$ est inversible en un point (x,y) alors l'équation ci-dessus entraîne que $D\Psi_{f(x,y)} = 0$, ce qui contredit l'hypothèse sur Ψ. Par conséquent, pour tout $(x,y) \in U$, $Df_{(x,y)}$ n'est pas inversible. Mais, comme f est holomorphe, sa différentielle en un point $z = (x,y)$ correspond à la multiplication par $f'(z)$, et est donc inversible ssi $f'(z) \neq 0$. Finalement, on obtient que $f'(z) = 0$ pour tout $z \in U$. Puisque U est connexe, ceci entraîne que f est constante sur U.
On aurait pu faire toute cette question en utilisant des dérivées partielles, les équations de Cauchy-Riemann et une résolution de système... mais un peu d'algèbre linéaire n'a jamais fait de mal à personne !

ii) Une droite du plan est l'ensemble des points (x,y) tels que $ax + by + c = 0$ (pour un certain triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$) tandis qu'un cercle est donné par une équation du type $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - R^2 = 0$. En appliquant le résultat de la question précédente aux fonctions $\Psi_1(x,y) = ax + by$ et $\Psi_2(x,y) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$, on en déduit que les seules fonctions holomorphes dont l'image est incluse dans une droite du plan (i.e qui satisfont $\Psi_1(f(z)) = 0$ pour tout $z \in U$) sont les fonctions constantes ; de même les seules fonctions holomorphes dont l'image est incluse dans un cercle du plan sont les fonctions constantes.
Vous verrez bientôt en cours que les fonctions holomorphes non constantes sont des fonctions ouvertes, i.e l'image d'un ouvert par une fonction holomorphe non constante est toujours un ouvert. Ce théorème a bien sûr pour corollaire le résultat montré dans cet exercice.

Exercice 1.2.10

1. Supposons que Q_1 soit telle que $P + iQ_1$ soit holomorphe. Les équations de Cauchy-Riemann nous disent qu'on doit avoir à la fois

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q_1}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q_1}{\partial x} \end{cases}$$

Par conséquent, les deux dérivées partielles de $Q - Q_1$ doivent être nulles, ce dont on déduit que $Q - Q_1$ est constante sur U (qui est connexe). Réciproquement, si $Q_1 = Q + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ alors $P + iQ_1 = f + ic$ est holomorphe. Finalement, on obtient donc que les fonctions Q_1 telles que $P + iQ_1$ soit holomorphe sont les fonctions de la forme $Q_1 = Q + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.

2. On va simplement corriger les questions (a) et (d), les deux autres étant similaires.
   (a) Appelons Q la partie imaginaire de f ; f est holomorphe si, et seulement si, les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées, i.e si, et seulement si,

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2y + 1 \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2x - 1 \end{cases}$$

La première ligne nous donne $Q(x, y) = 2xy + x + F(y)$, la deuxième ligne donne $Q(x, y) = 2xy - y + G(x)$. On obtient finalement que Q doit être de la forme $Q(x, y) = 2xy + x - y + c$, avec $c \in \mathbb{R}$. Notons qu'on a alors

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - x - y + i(2xy + x - y) + ic = (x + iy)^2 - (x + iy) + i(x + iy) + ic$$

Autrement dit, $f(z) = z^2 + (i - 1)z + ic$, avec $c \in \mathbb{R}$

(d) En appliquant la même méthode, on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \mathrm{ch}(y)\sin(x) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\mathrm{sh}(y)\cos(x) \end{cases}$$

En intégrant comme dans l'exemple précédent, on obtient $P(x, y) = -\mathrm{ch}(y)\cos(x) + c$, et finalement $f(x, y) = -\mathrm{ch}(y)\cos(x) + i\mathrm{sh}(y)\sin(x) + c$.
En utilisant les formules reliant fonctions trigonométriques et fonctions hyperboliques ($\mathrm{ch}(y) = \cos(iy)$ et $i\mathrm{sh}(y) = \sin(iy)$) on obtient

$$f(x, y) = -\cos(iy)\cos(x) + \sin(iy)\sin(x) + c = -cos(x + iy) + c\ .$$

3. On note $P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ avec a, b, c réels.

(a) Toujours grâce aux équations de Cauchy-Riemann, on doit avoir, en notant Q la partie réelle de f :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

Comme P est un polynôme, P est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et les équations ci-dessus montrent qu'il en va de même pour Q [1] ; on peut donc considérer les dérivées secondes de P, Q. Les équations de Cauchy-Riemann entraînent que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} \end{cases}$$

Puisque Q est de classe $\mathcal{C}^2$, on peut lui appliquer le lemme de Schwarz qui nous donne l'égalité $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}$. Finalement, on voit que P doit vérifier $\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$, autrement dit $2a + 2c = 0$, c'est-à-dire $a = -c$. (Bien sûr, on aurait simplement pu intégrer les deux lignes données par Cauchy-Riemann pour calculer Q à une constante près et retrouver cette condition ; mais ci-dessus on a montré un résultat plus général, qui s'appliquerait à toutes les fonctions qui sont partie réelle d'une fonction holomorphe).
En appliquant les mêmes méthodes que tout à l'heure pour calculer Q, on obtient (quand $a = -c$)

$$Q(x, y) = 2axy + b(y^2 - x^2) + K \qquad (K \in \mathbb{R})$$

Finalemenent, on obtient que, pour une certaine constante $K \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x, y) = 2bxy + a(x^2 - y^2) + i\left(2axy + b(y^2 - x^2)\right) + iK = a(x^2 - y^2 + 2ixy) - ib(x^2 - y^2 + 2ixy) + iK\ .$$

Autrement dit, $f(z) = (a - ib)z^2 + iK$, avec $K \in \mathbb{R}$.

1. On verra plus tard dans le cours qu'une fonction holomorphe est *toujours* de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 3.3.2

1. Appelons f une détermination holomorphe du logarithme sur U, i.e une fonction holomorphe telle que $e^{f(z)} = z$ pour tout $z \in U$. Si l'on pose $g(z) = e^{f(z)/p}$ alors on a

$$\forall z \in U \quad g(z)^p = e^{pf(z)/p} = e^{f(z)} = z \ .$$

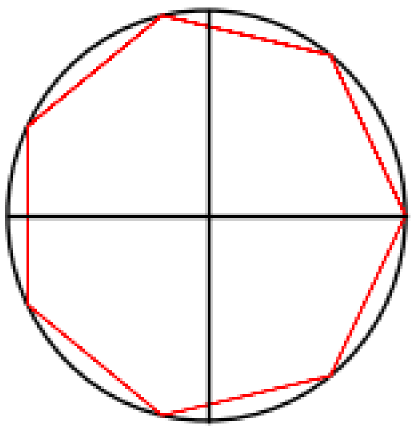
Par conséquent, g est une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U.

a) On doit avoir, pour tout $z \in U$, $f^p(z) = z$. En dérivant cette inégalité, on obtient

$$\forall z \in U \quad pf'(z)(f(z))^{p-1} = 1 \ .$$

On voit en particulier qu'on doit avoir $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$; si $0 \in U$ on aurait $f(0)^p = 0$, donc $f(0) = 0$ et on vient de voir que c'est impossible. Par conséquent $0 \notin U$.

b) On a vu à la question précédente que f_1 et f_2 ne s'annulent pas. Notons D_p l'ensemble (fini) des racines n-ièmes de l'unité, Rappelons que cet ensemble correspond géométriquement aux sommets d'un polygône régulier à p côtés, représenté ci-dessous quand $p = 7$.



Les racines septièmes de l'unité.

Considérons la fonction $g = f_1/f_2$. Puisque $f_1(z)^p = z = f_2(z)^p$ pour tout $z \in U$, on voit que $g(z)^p = 1$ pour tout $z \in U$. Par conséquent, g prend ses valeurs dans l'ensemble fini D_p. Comme g est continue et U est connexe, cela signifie que g est constante, autrement dit il existe une racine p-ième de l'unité λ telle que $f_1(z) = \lambda f_2(z)$ pour tout $z \in U$.

c) Si f est une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U alors, pour tout $\lambda \in D_p$, λf est aussi une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$. On vient de montrer la réciproque dans la question précédente. Par conséquent, les déterminations holomorphes de $z \mapsto z^{1/p}$ sont les fonctions de la forme λf, où λ est une racine p-ième de l'unité. Il y a autant de telles fonctions que de racines p-ièmes de l'unité, c'est-à-dire p.

d) Sur $U = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^-$; on sait qu'il existe une détermination holomorphe sur U du logarithme. Appelons Log la détermination principale. Alors la question a) nous dit que $g \colon z \mapsto e^{\mathrm{Log}(z)/3}$ est une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/3}$. On a $g(1) = e^0 = 1$; puisque $e^{4i\pi/3}$ est une racine cubique de l'unité, on voit donc que $f = e^{4i\pi/3} g$ est une détermination de $z \mapsto z^{1/3}$ telle que $f(1) = e^{4i\pi/3}$.
L'unicité d'une telle fonction f est immédiate, puisque comme U est connexe deux déterminations holomorphes de $z \mapsto z^{1/3}$ sur U doivent être proportionnelles, et deux fonctions proportionnelles qui sont égales en un point sont égales partout.

Exercice 4.1.4 Reprenons cet exercice ; en TD on a vu, en appliquant la définition de l'intégrale curviligne, que

$$\int_{\gamma_R} f(z)e^{iz}dz = \int_0^\pi f(Re^{it})e^{ie^{it}}.Re^{it}dt \ .$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on en avait déduit que

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)e^{iz}dz\right| \leq \int_0^\pi \left|f(Re^{it})e^{iRe^{it}}\right| Rdt = R\int_0^\pi \left|f(Re^{it})\right| e^{-R\sin(t)}dt$$

(On a utilisé le fait que $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$, appliqué à $z = iRe^{it}$).
Finalement, en utilisant l'hypothèse sur f, nous étions arrivés à

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)e^{iz}dz\right| \leq MR^{n+1}\int_0^\pi e^{-R\sin(t)}dt \ . \tag{1}$$

Nous nous trouvâmes alors fort marris, nul ne sachant comment remplacer ce R^{n+1} par le R^n demandé par l'énoncé... Nous avions vu que, par symétrie ($\sin(\pi - t) = \sin(t)$), on avait

$$\int_0^\pi e^{-R\sin(t)}dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin(t)}dt \ .$$

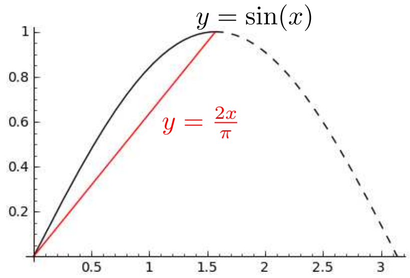
Je vous avais alors demandé de réfléchir à des majorations possibles de cette intégrale- et d'essayer d'utiliser une idée proche de celle d'une de vos camarades, qui proposait d'utiliser l'inégalité $\sin(t) \leq t$, valable pour tout $t \geq 0$, mais hélas dans le mauvais sens pour nous être utile ici (on en déduirait une minoration de l'intégrale).
On chercherait donc une inégalité du type $\sin(t) \geq \alpha t$, avec un α permettant de récupérer le résultat de l'énoncé ; il est alors tentant de chercher à établir l'inégalité $\sin(t) \geq \dfrac{2t}{\pi}$, qui se trouve être valable sur $[0, \pi/2]$ (c'est une conséquence du fait que le graphe de la fonction sin est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$; tous ses points se trouvent donc au-dessus de la corde joignant $(0,0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$, comme essaye de le montrer le dessin à la fin de l'exercice). Armés de cette inégalité, nous obtenons (en utilisant le fait que l'exponentielle est croissante, et que l'intégrale préserve les inégalités)

$$\int_0^{\pi/2} e^{-\sin(t)}dt \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2Rt/\pi}dt = \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R}) \ .$$

Finalement, on obtient donc $\displaystyle\int_0^\pi e^{-\sin(t)}dt \leq \frac{\pi}{R}$, ce qui nous permet, en réinjectant cette inégalité dans (1), d'obtenir le résultat demandé par l'énoncé, à savoir

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)e^{iz}dz\right| \leq M\pi R^n \ .$$

L'inégalité de concavité de sin *est souvent utile quand on doit majorer certaines intégrales ; voici un dessin essayant de la justifier...*



L'inégalité de concavité du sinus

Exercice 5.2.4

1. Ici, on pourrait être tenté de reprendre la preuve vue en cours du fait que l'indice ne prend que des valeurs entières ; en fait, l'intégrale de l'exercice *est* un indice. Voyons pourquoi : déjà, notons que si γ est un circuit tracé dans U alors $f \circ \gamma$ est un circuit tracé dans $\mathbb{C}$. Une paramétrisation de $f \circ \gamma$ est bien sûr donnée par $t \mapsto f(\gamma(t))$ pour tout $t \in I$ où I est l'intervalle de définition de γ.
   L'indice α de 0 par rapport à $f \circ \gamma$ vaut, par définition,
   $$\alpha = \frac{1}{2i\pi} \int_{f\circ\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi} \int_I \frac{1}{f(\gamma(t))} (f \circ \gamma)'(t) dt = \frac{1}{2i\pi} \int_I \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))} dt \ .$$
   Maintenant, si l'on calcule l'intégrale de l'énoncé en utilisant la définition de l'intégrale curviligne, on voit que
   $$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_I \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt \ .$$
   On voit finalement que $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ est égal à α ; c'est donc un entier relatif.
2. Fixons un circuit γ dans U. Notons que, si g est une détermination holomorphe de $f^{1/n}$, i.e si $g^n = f$, alors on a
   $$n \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} \ .$$
   En particulier, si pour tout $n > 0$ il existe une détermination holomorphe g_n de $f^{1/n}$, alors on a
   $$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n . \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{g_n'(z)}{g_n(z)} dz \ .$$
   Puisque, d'après le résultat de la question précédente appliquée à g_n, $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{g_n'(z)}{g_n(z)} dz$ est un entier relatif, on en déduit que $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ est divisible par n ; ceci étant vrai pour tout $n > 0$, on en déduit finalement que $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$. Puisque le circuit γ était quelconque, ceci prouve que f'/f a une primitive holomorphe sur U, autrement dit il existe une détermination holomorphe de f sur U.
   Le fait que l'intégrale de la question 1 soit égale à l'indice de 0 *relativement à* $f \circ \gamma$ *sera utile quand nous compterons les zéros de fonctions holomorphes.*