L3 Mathématiques — Printemps 2009/2010
Fonctions d'une Variable Complexe — J. Melleray

Quelques exercices corrigés (2).

Correction de l'exercice 7.6
Notons avant de commencer que U est connexe par arcs et donc connexe.

a) En dérivant, l'égalité $f(az) = f(z)$ nous donne $af'(az) = f'(z)$ pour tout $z \in U$, donc (par récurrence) $a^n f'(a^n z) = f'(z)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que
$$\forall g \in \mathbb{N} \; g(a^n) = a^n f'(a^n.1) - f'(1) - f'(1) = 0 \; .$$

b) La fonction g s'annule sur $\{a^n : n \in \mathbb{N}\}$, qui est un sous-ensemble infini[1] du cercle unité, lequel est compact. Par le théorème des zéros isolés appliqué à g sur l'ouvert connexe U, on en déduit que g est constante.

c) On sait que pour tout $z \in U$ on a $zf'(z) = f'(1)$. Si $f'(1) = 0$ alors on en déduit que $f'(z) = 0$ pour tout $z \in U$, et par connexité de U f doit alors être constante. Il nous faut donc prouver que $f'(1) = 0$. Si ce n'est pas le cas, alors la fonction g définie par $g(z) = \dfrac{f(z)}{f'(1)}$ est holomorphe sur U et on a $g'(z) = \dfrac{1}{z}$. La fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ admet donc une primitive holomorphe sur U (autrement dit, il y a une branche de logarithme sur U), et comme U contient un cercle centré en 0 on sait que ce n'est pas le cas (l'intégrale de $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ sur un tel cercle parcouru une fois dans le sens direct est égale à $2i\pi$).

d) La preuve ne marche plus, puisque l'ensemble des a^n est maintenant fini. La conclusion n'est plus valide non plus. Par exemple, en prenant $a = -1$ et $f(z) = z^2$, on a une fonction non constante holomorphe sur U et telle que $f(az) = z$ pour tout $z \in U$.

Singularités et partie singulière de de $z \mapsto \dfrac{1}{\sin(z^2)}$.
Les singularités sont tous les z tels que $z^2 = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, autrement dit les $\pm\sqrt{n\pi}$ et $\pm i\sqrt{n\pi}$ avec $n \in \mathbb{N}$. Toutes ces singularités sont isolées.
Commençons par voir ce qui si passe en 0 : on sait que $\sin(z^2) \sim z^2$ en 0, et on en déduit que en 0 on a $f(z) \sim \dfrac{1}{z^2}$, ce qui donne immédiatement que 0 est un pôle d'ordre 2 de f. Pour calculer la partie singulière de f en 0, le plus simple est de mettre en facteur $1/z^2$, et de calculer le développement limité à l'ordre 2 de $\dfrac{z^2}{\sin(z^2)}$ en 0 :
$$\frac{z^2}{\sin(z^2)} = \frac{z^2}{z^2 + o(z^4)} = \frac{1}{1 + o(z^2)} = 1 + o(z^2) \; .$$
On en déduit que la partie singulière en 0 est $\dfrac{1}{z^2}$.
Soit maintenant z_0 une singularité de f différente de 0. On a $\lim |f(z)| = +\infty$ quand $z \to z_0$, donc z_0 est un pôle de f. Posons $z = z_0 + x$ et faisons tendre x vers 0 :
$$(z - z_0)f(z) = \frac{x}{\sin(x + z_0)^2} = \frac{x}{\sin(x^2 + 2xz_0 + z_0^2)} = \frac{x}{\cos(z_0^2)\sin(x^2 + 2xz_0)}$$

1. a n'est pas une racine de l'unité, donc l'application $n \mapsto a^n$ est injective.

(la dernière égalité vient du fait que $\sin(z_0)^2 = 0$). En faisant un développement limité en 0 de $\sin(x^2 + 2xz_0) = 2xz_0 + o(1)$, on en déduit que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{1}{2z_0 \cos(z_0^2)} \ .$$

Toutes les singularités différentes de 0 sont donc des pôles d'ordre 1, et la partie singulière de f est égale à

- $\frac{1}{2z_0}$ si $z_0 = \pm\sqrt{k\pi}$ ou $\pm i\sqrt{k\pi}$ et k est pair.
- $\frac{-1}{2z_0}$ si $z_0 = \pm\sqrt{k\pi}$ ou $\pm i\sqrt{k\pi}$ et k est impair.

Remarque. On n'a pas calculé tout le développement en série de Laurent de f sur un petit disque épointé au voisinage d'une singularité. A titre d'exemple, tentons de mener ce calcul en 0. On écrit :

$$\frac{1}{\sin(z^2)} = \frac{1}{z^2} \frac{z^2}{\sin(z^2)} \ .$$

On se retrouve donc à vouloir développer en série de Laurent la fonction $z \mapsto \frac{z^2}{\sin(z^2)}$, qui est une fonction holomorphe en 0 ; ce développement sera donc une série entière [2], de la forme $\sum a_n z^{4n}$ (parce que $f(-z) = f(z)$ et $f(iz) = f(z)$ pour tout $z \in U$).

Pour calculer les a_n, on peut par exemple essayer d'utiliser

$$\frac{\sin(z^2)}{z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{4n}}{(2n+1)!}$$

On en déduit que

$$1 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{4n} \right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^{4m}}{(2m+1)!} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} z^{4p} \sum_{n,m \geq 0, m+n=p} \frac{a_n (-1)^m}{(2m+1)!} \ .$$

On retrouve ainsi le fait que $a_0 = 1$, et une relation de récurrence permettant de calculer les a_n de proche en proche :

$$\forall p \geq 1 \ a_p = -\sum_{m=1}^{p} \frac{a_{p-m}(-1)^m}{(2m+1)!} \ .$$

Ceci ne nous donne pas pour autant une jolie formule pour les a_n... Je n'en connais d'ailleurs pas.

Singularités et partie singulière de $f \colon z \mapsto \frac{e^{iz}}{1 + \cos(z)}$.

Les zéros du dénominateur sont les $(2k+1)\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Utilisons les développements limités en posant $z = (2k+1)\pi + x$ et en faisant tendre x vers 0 :

$$f(z) = \frac{e^{i(2k+1)\pi + ix}}{1 + \cos((2k+1)\pi + x)} = \frac{-e^{ix}}{1 - \cos(x)} = \frac{1 - ix + o(x)}{x^2/2 + o(x^3)}$$

On en déduit, en mettant en facteur $1/x^2$:

$$f(z) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2 - 2ix + o(x)}{1 + o(x)} = \frac{2 - 2ix + o(x)}{x^2} \ .$$

Par conséquent, la partie singulière de f en $(2k+1)\pi$ est $\frac{2}{(z - (2k+1)\pi)^2} - \frac{2i}{z - (2k+1)\pi}$, et le résidu est égal à $-2i$.

2. On sait aussi que le rayon de convergence de cette série sera $\sqrt{\pi}$. Pourquoi ?