Correction de l'exercice 2 du DM1.

(a) Comme κ est singulier, on sait qu'il existe un cardinal $\eta < \kappa$ et une fonction $f\colon \eta \to \kappa$ dont l'image n'est pas bornée. Remarquons que comme κ est singulier, c'est un cardinal limite ; par conséquent on sait que si $\alpha \in \kappa$ alors il existe un cardinal λ tel que $\alpha < \lambda < \kappa$. Pour tout $\alpha < \eta$ on peut donc définir

$$\tilde{f}(\alpha) = \min\{\lambda < \kappa\colon f(\alpha) < \lambda\} \; .$$

Alors $\tilde{f}(\alpha) = \kappa_\alpha$ est un cardinal pour tout $\alpha < \eta$, et comme $\tilde{f}(\alpha) > \alpha$ on voit que $\kappa = \sup_{\alpha<\eta} \kappa_\alpha$. Si $\eta \geq \lambda_0$ on a fini ; sinon, il suffit de "répéter" suffisamment de fois les mêmes valeurs. Par exemple, on peut remarquer que comme $\eta < \lambda_0$ il existe une surjection $f\colon \lambda_0 \to \eta$; on peut alors poser, pour $\alpha < \lambda_0$, $\tilde{\kappa}_\alpha = \kappa_{f(\alpha)}$. Alors la suite $(\tilde{\kappa}_\alpha)_{\alpha<\lambda_0}$ a κ comme borne supérieure.

(b) C'est une conséquence directe de la définition des κ_α : si deux fonctions $f, g\colon \kappa \to 2$ sont différentes alors il existe $\beta < \kappa$ tel que $f(\beta) \neq g(\beta)$, et comme $\beta \in \kappa_\alpha$ pour un certain $\alpha < \rho$ on voit que f^α et g^α ne sont pas égales.

(c) Puisque $\lambda_0 < \kappa$ on a $2^{\lambda_0} \leq 2^\kappa$, autrement dit $\gamma \leq 2^\kappa$. Réciproquement, le résultat de la question précédente montre que

$$2^\kappa \leq \prod_{\alpha<\rho} 2^{\kappa_\alpha} \leq \prod_{\alpha<\rho} \gamma = \gamma^\rho = (2^\rho)^\rho = 2^\rho = \gamma \; .$$