Université Claude Bernard Lyon I
Master 1

2nd semestre 2009/2010
Introduction à la Logique

Théorie des ensembles
Correction du DM1.

1. Montrons par récurrence transfinie que $\omega^\alpha \geq \alpha$ pour tout ordinal α. On a bien $\omega^0 = 1$, donc notre hypothèse est vraie pour $\alpha = 0$; de même on voit immédiatement qu'elle est vraie pour $\alpha = 1$, et en fait pour tout α fini. supposons maintenant que $\alpha \geq \omega$ soit tel que, pour tout $\beta < \alpha$, on ait $\omega^\beta \geq \beta$. Deux cas sont à considérer :
   - $\alpha = \beta + 1$ pour un certain $\beta \geq 1$; alors $\omega^\alpha = \omega^\beta.\omega$ par définition de l'exponentiation ordinale. Comme $\omega^\beta \geq \beta$, on en déduit, grâce aux propriétés de la multiplication et de l'addition, que
   $$\omega^\alpha \geq \beta.\omega \geq \beta + \beta \geq \beta + 1 = \alpha \ .$$
   - α est limite. Alors on a $\omega^\alpha = \sup\{\omega^\beta \colon \beta < \alpha\} \geq \sup\{\beta \colon \beta < \alpha\} = \alpha$.

   Dans les deux cas on récupère bien l'inégalité qu'on souhaitait démontrer, et on a gagné.
2. Grâce à la question précédente, on a $\alpha < \omega^{\alpha+1}$ et on sait donc qu'il existe des ordinaux β tels que $\omega^\beta > \alpha$. On peut alors considérer le plus petit tel ordinal et l'appeler γ. Si γ était limite, alors on aurait
   $$\omega^\gamma = \sup\{\omega^\beta \colon \beta < \gamma\} \text{ et } \omega^\beta \leq \alpha \text{ pour tout } \beta < \gamma \ .$$
   Par conséquent, si γ était limite alors on aurait $\omega^\gamma \leq \alpha$, ce qui est impossible ; on a donc $\gamma = \alpha_1 + 1$ pour un certain ordinal α_1, qui est donc tel que
   $$\omega^{\alpha_1} \leq \alpha < \omega^{\alpha_1+1} \ .$$
   Puisque $\alpha \mapsto \omega^\alpha$ est croissante, on voit qu'un tel ordinal α est unique.
   Comme $\omega^{\alpha_1+1} = \omega^{\alpha_1}.\omega = \sup\{\omega^\alpha.n \colon n < \omega\}$, on sait qu'il existe un entier n tel que $\alpha < \omega^{\alpha_1}.n$. En considérant le plus petit tel n (nécessairement plus grand que 2), et en posant $n_1 = n - 1$, on obtient finalement que
   $$\omega^{\alpha_1}.n_1 \leq \alpha < \omega^{\alpha_1}.(n_1 + 1)$$
   Cette fois-ci, on utilise le fait que l'application $n \mapsto \omega^{\alpha_1}.n$ est croissante pour déduire qu'un tel n_1 est unique.
3. En utilisant le résultat de l'exercice 4 de la première feuille de TD (qui se démontre encore une fois à l'aide d'une récurrence transfinie), on voit qu'il doit exister β_1, nécessairement unique puisque l'addition est régulière à droite, tel que
   $$\alpha = \omega^{\alpha_1}.n_1 + \beta_1 \ .$$
   De plus, comme l'application $\beta \mapsto \omega^{\alpha_1} + \beta$ est croissante, et $\alpha < \omega^{\alpha_1}.n_1 + \omega^{\alpha_1}$, on doit avoir $\beta_1 < \omega^{\alpha_1}$.
4. On peut appliquer la construction précédente à β_1, et obtenir $n_2 \in \omega \setminus \{0\}, \alpha_2, \beta_2 < \omega^{\alpha_2}$ tels que
   $$\beta_1 = \omega^{\alpha_2}.n_2 + \beta_2 \ .$$
   Comme $\beta_2 < \omega^{\alpha_2}$ on doit en particulier avoir $\beta_2 < \beta_1$. Si $\beta_2 \neq 0$ alors on peut continuer ; si l'on itère ce procédé, on va donc construire une suite d'entiers non nuls n_i, une suite strictement décroissante d'ordinaux non nuls α_i, et une suite strictement décroissante d'ordinaux non nuls β_i (au sens où tant que $\beta_i \neq 0$ on a $\beta_{i+1} < \beta_i$). Comme il ne peut pas exister de suite infinie strictement décroissante d'ordinaux, on en déduit qu'il existe m tel que $\beta_{m+1} = 0$, et alors on a
   $$\alpha = \omega^{\alpha_1}.n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_m}.n_m \ ,$$
   avec $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots \alpha_m$ et $n_i \neq 0$ pour tout i. Ceci prouve finalement l'existence du développement de Cantor.

5. Vérifions l'unicité ; soit α un ordinal, qui s'écrit $\alpha = \omega^{\alpha_1}.n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_m}.n_m = \omega^{\beta_1}.p_1 + \ldots + \omega^{\beta_q}.p_q$, avec (α_i), (β_j) strictement décroissantes et n_i, p_j non nuls. Alors on voit qu'on doit avoir
$$\omega^{\alpha_1} \leq \alpha < \omega^{\alpha_1+1} \text{ et } \omega^{\beta_1} \leq \alpha < \omega^{\beta_1+1} .$$
On a vu à la question 2 que ceci entraîne que $\alpha_1 = \beta_1$; on a aussi
$$\omega^{\alpha_1}.n_1 \leq \alpha < \omega^{\alpha_1}.(n_1+1) \text{ et } \omega^{\alpha_1}.m_1 \leq \alpha < \omega^{\alpha_1}.(m_1+1) .$$
Comme à la question 2 on en déduit que $n_1 = m_1$; une récurrence immédiate permet alors de conclure que le développement de Cantor d'un ordinal non nul est unique.
6. Etant donné un ordinal α et son développement de Cantor $\alpha = \omega^{\alpha_1}.n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_m}.n_m$, on peut considérer la fonction f_α qui associe n_i à α_i et 0 à tous les ordinaux différents d'un α_i. Cette fonction code le développement de Cantor de α ; de plus, c'est une fonction à support fini définie sur la collection des ordinaux et à valeurs dans ω. On peut comparer deux telles fonctions en utilisant l'ordre lexicographique inverse : si $f, g \colon ON \to \omega$ sont à supports finis, on pose
$$(f \prec g) \Leftrightarrow \exists \alpha \in ON \, (\forall \beta > \alpha \; f(\beta) = g(\beta) \text{ et } f(\alpha) < g(\alpha)) .$$
Ceci définit un ordre (strict) total sur les fonctions à support fini de ON dans ω, et l'on peut utiliser cet ordre pour poser, étant donnés deux ordinaux α, β,
$$\alpha \prec \beta \Leftrightarrow f_\alpha \prec f_\beta .$$
Le critère de comparaison demandé par l'énoncé est le suivant : étant donnés deux ordinaux α, β, on a $\alpha \prec \beta$ si, et seulement si, $\alpha < \beta$. La vérification du fait que $f_\alpha \prec f_\beta$ entraîne $\alpha < \beta$ est assez immédiate : on a dans ce cas
$$\alpha = \omega^{\alpha_1}.n_1 + \ldots \omega^{\alpha_k}.n_k + \omega^{\alpha_{k+1}}.n_{k+1} + \gamma, \qquad \beta = \omega^{\alpha_1}.n_1 + \ldots \omega^{\alpha_k}.n_k + \omega^{\alpha_{k+1}}.m_{k+1} + \gamma',$$
avec $m_{k+1} < n_{k+1}$. Etant données les propriétés de l'addition, on vérifie que $\alpha < \beta$.
Pour voir l'autre implication, reprenons la définition du développement de Cantor : les premiers termes (α_1, n_1) et (β_1, m_1) sont obtenus de telle façon que si $\alpha < \beta$ alors $\alpha_1 \leq \beta_1$ et $n_1 \leq m_1$. Si une des inégalités est stricte, alors on a $f_\alpha \prec f_\beta$; si les deux sont des égalités, alors on peut reprendre le raisonnement précédent avec α', β' qui sont tels que $\alpha = \omega^{\alpha_1}.n_1 + \alpha'$, $\beta' = \omega^{\alpha_1}.n_1 + \beta'$, et doivent vérifier $\alpha' < \beta'$. Une récurrence « immédiate »montre finalement bien que $f_\alpha \prec f_\beta$.
7. Commençons par remarquer (par récurrence transfinie...) que pour tout $\alpha < \beta$ on a $\omega^\alpha + \omega^\beta = \omega^\beta$. Si maintenant on a $\gamma < \omega^\beta$, alors
$$\gamma = \omega^{\gamma_1}.n_1 + \ldots \omega^{\gamma_m}.n_m$$
avec $\beta > \gamma_1 > \ldots > \gamma_m$, et alors l'associativité de l'addition, alliée à la remarque précédente, nous donne immédiatement $\gamma + \omega^\beta = \beta$. Ceci démontre une des implications ; supposons maintenant que β soit tel que $\gamma + \beta = \beta$ pour tout $\gamma < \beta$, et considérons encore son développement de Cantor, sous la forme $\beta = \omega^{\beta_1}.n_1 + \gamma'$, $\gamma' < \omega^{\beta_1}$. Si $\omega^{\beta_1} < \beta$, alors on voit que $\omega^{\beta_1} + \beta = \omega^{\beta_1}.(n_1+1) + \gamma' > \beta$, ce qui est absurde. Donc $\beta = \omega^{\beta_1}$.
8. Considérons deux ordinaux α, β avec leurs développements de Cantor $\alpha = \omega^{\alpha_1}.n_1 + \ldots \omega^{\alpha_m}.n_m$ et $\beta = \omega^{\beta_1}.p_1 + \ldots \omega^{\beta_q}.p_q$. On choisit le plus grand j (éventuellement 0) tel que l'on ait $\alpha_j \geq \beta_1$. Alors, la question précédente permet de vérifier que pour tout $i > j$ on a $\omega^{\alpha_i}.n_i + \beta_1 = \beta_1$, et on en déduit en utilisant l'associativité de l'addition ordinale que le développement de Cantor de $\alpha + \beta$ est
$$\omega^{\alpha_1}.n_1 + \ldots \omega^{\alpha_j}.n_j + \omega^{\beta_1}.p_1 + \ldots \omega^{\beta_q}.p_q .$$
(Notons tout de même que, si $\alpha_j = \beta_1$, la formule ci-dessus doit encore être réduite pour donner le développement de Cantor). Deux exemples :
$$(\omega^2 + \omega + 1) + \omega = \omega^2 + \omega.2; (\omega^9 + \omega^4.6 + 2\omega^3 + 5) + (\omega^7.3 + \omega^2) = \omega^9 + \omega^7.3 + \omega^2 .$$
9. Etant donnés deux ordinaux α, β et les fonctions f_α, f_β codant leurs développements de Cantor respectifs comme à la question 6, on peut définir $\alpha \oplus \beta$ comme étant l'unique ordinal dont le développement est $f_\alpha + f_\beta$ (la fonction obtenue en sommant terme à terme f_α et f_β : c'est encore une fonction à support fini). Puisque l'addition sur les entiers est associative, commutative et simplifiable, on voit immédiatement qu'il en va de même de $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \oplus \beta$.