Université Claude Bernard Lyon I
Master 1

2nd semestre 2015/2016
Introduction à la logique mathématique

Devoir maison (préparation pour le partiel)

Exercice 1
Dans cet exercice, on admet l'hypothèse du continu généralisée, c'est-à-dire $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$ pour tout ordinal α.

1. Soit κ un cardinal infini et λ un cardinal non nul ; montrer que :

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \kappa & \text{si } \lambda < \mathrm{cof}(\kappa) \\ \kappa^+ & \text{si } \mathrm{cof}(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa \\ \lambda^+ & \text{si } \kappa \leq \lambda \end{cases}$$

2. En déduire les valeurs de κ^λ quand κ est régulier.

Exercice 2
Dans cet exercice on considère un cardinal singulier κ, et on suppose qu'il existe des cardinaux $\lambda_0 < \kappa$ et γ tels que :

$$\forall \lambda \ \big(\lambda_0 \leq \lambda < \kappa\big) \Rightarrow 2^\lambda = \gamma$$

Le but de l'exercice est de prouver qu'on doit alors avoir $2^\kappa = \gamma$.
(a) Montrer qu'il existe un cardinal ρ tel que $\lambda_0 \leq \rho < \kappa$ et une famille de *cardinaux* $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\rho}$ tels que

$$\kappa = \sup\{\kappa_\alpha \colon \alpha < \rho\} \ .$$

(b) Pour $f \in 2^\kappa$ et $\alpha < \rho$, on appelle f^α la restriction de f à κ_α. Montrer que $f \mapsto (f^\alpha)_{\alpha<\rho}$ est une injection de 2^κ dans $\prod_{\alpha<\rho} 2^{\kappa_\alpha}$.
(c) Conclure.

Exercice 3 Dans cet exercice, on veut montrer le théorème suivant, dû à Tarski : l'axiome du choix est équivalent au fait que X et $X \times X$ soient équipotents pour tout ensemble infini X.

1. On suppose que l'axiome du choix est vrai. Montrer que X et $X \times X$ sont équipotents pour tout ensemble infini X.
2. On souhaite maintenant établir la réciproque. Supposons que X est un ensemble ne pouvant pas être muni d'un bon ordre.
   (a) Justifier l'existence d'un ordinal β tel qu'il n'existe pas de surjection de X sur β.
   (b) Supposons maintenant qu'il existe une bijection $f \colon X \sqcup \beta \to (X \sqcup \beta) \times (X \sqcup \beta)$. Montrer que, pour tout $x \in X$, il existe un ordinal γ tel que $f(\gamma) \in \beta \times \{x\}$.
   (c) Notons, pour $x \in X$,
   $$g(x) = \min\left(\{\gamma \colon f(\gamma) \in \beta \times \{x\}\}\right)$$
   Utiliser g pour munir X d'un bon ordre.
   (d) Conclure.