Université Claude Bernard Lyon I | 2nd semestre 2009/2010
Master 1 | Introduction à la logique mathématique

DM 5 à rendre le 6 mai 2010

Exercice 1 On rappelle qu'un groupe est simple s'il ne possède pas de sous-groupe normal, propre et non trivial. Les groupes alternés $\mathcal{A}_n$ pour $n \geq 5$ sont simples. On considère une structure de groupe $\mathcal{G} = \langle G, 1, \cdot, ^{-1} \rangle$. Pour tout $x, y \in G$, on note x^y l'élément yxy^{-1}, c'est-à-dire le conjugué de x par y.

1. Montrer que $\mathcal{G}$ est simple si et seulement si pour tout $x \in G \setminus \{1\}$ et tout $y \in G$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\mathcal{G} \models \exists z_1 \ldots z_n \, (y = (x^{\pm 1})^{z_1} \ldots (x^{\pm 1})^{z_n}).$$
2. Montrer que si $\mathcal{G}$ est simple alors toute sous-structure élémentaire de $\mathcal{G}$ est également un groupe simple.
3. Le *groupe alterné infini*, noté $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$, est par définition la limite directe des groupes alternés finis $\mathcal{A}_n$. En effet, si $0 < m \leq n$, il y a un plongement naturel de $\mathcal{A}_m$ dans $\mathcal{A}_n$, si bien que l'on peut considérer l'union des groupes $\mathcal{A}_n$ munie de loi de compositon des permutations. On peut également caractériser le groupe alterné infini comme étant l'ensemble des permutations paires, à support fini, de l'ensemble des entiers naturels, muni de la composition des fonctions.

   Montrer que $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$ est simple.
4. En utilisant la compacité, montrer que $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$ a une extension élémentaire qui n'est pas simple.

Exercice 2 Soit le langage $L = \{f\}$ où f est un symbole de fonction unaire. Pour tout $n \geq 0$ on notera f^n la composée n-fois de f.
Soit T la L-théorie axiomatisée par

$$\forall x f^n(x) \neq x \ \ (n \geq 1)$$
$$\exists x (\forall z \ f(z) \neq x \wedge (\forall y (\forall t \ f(t) \neq y) \to x = y)$$
$$\forall x \forall y \ f(x) = f(y) \to x = y$$

1. Montrer que tout modèle de T est infini.
2. Montrer que $\langle \mathbb{N}, s \rangle$ où s est la fonction successeur est un modèle de T.
3. Montrer que T n'est pas finiment axiomatisable.
4. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T. On définit sur $\mathcal{M}$ la relation $x \sim y$ s'il existe $n \geq 0$, $m \geq 0$ tel que $\mathcal{M} \models f^n(x) = f^m(y)$.
   (a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
   (b) Montrer que chaque classe d'équivalence est une sous-structure de $\mathcal{M}$.
   (c) Montrer qu'une et une seule classe est isomorphe à $\langle \mathbb{N}, s \rangle$ et que toutes les autres sont isomorphes à $\langle \mathbb{Z}, s \rangle$ avec s la fonction successeur sur $\mathbb{Z}$.
5. Soit κ un cardinal infini non dénombrable. Montrer que T est κ-catégorique (c.à.d. que les modèles de T de cardinal κ sont tous isomorphes.)

6. En déduire que T est complète et que T est la théorie de $\langle \mathbb{N}, s \rangle$.
7. Combien T a-t-elle de modèles dénombrables non isomorphes ?
8. Vérifier que T n'est pas modèle-complète, c'est-à-dire qu'il existe deux modèles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de T tels que $\mathcal{M}$ est sous-structure de $\mathcal{N}$ mais $\mathcal{M}$ n'est pas sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$. En déduire que T n'élimine pas les quanteurs.
9. Soit c un symbole de constante et T' la $L \cup \{c\}$-théorie axiomatisée par T et l'axiome $\forall z f(z) \neq c$. Montrer que T' est complète et élimine les quanteurs.
10. Montrer que $\langle \mathbb{N}, s \rangle$ se plonge élémentairement dans tout modèle de T.