**Leçon 228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.**

Rapport 2017 : *Cette leçon permet des exposés de niveaux très variés. Les théorèmes de base doivent être maîtrisés et illustrés par des exemples intéressants, par exemple le théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée. Le jury s'attend évidemment à ce que le candidat connaisse et puisse calculer la dérivée des fonctions usuelles. Les candidats doivent disposer d'un exemple de fonction dérivable de la variable réelle qui ne soit pas continûment dérivable. La stabilité par passage à la limite des notions de continuité et de dérivabilité doit être comprise par les candidats. De façon plus fine, on peut s'intéresser aux fonctions continues nulle part dérivables. Pour aller plus loin, la dérivabilité presque partout des fonctions lipschitziennes ou des fonctions monotones relève de cette leçon. L'étude de la dérivée au sens des distributions de* $x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f(t)dt$ *pour une fonction intégrable* $f$ *est un résultat intéressant qui peut trouver sa place dans cette leçon*

Notons que la leçon qui a été présentée manquait beaucoup d'applications (recherche d'extrema, preuve que toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ tq $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ est de la forme $x \mapsto \alpha x$...

Quelques exercices (de difficulté plus ou moins croissante)

1. Montrer que si $f$ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1]$ et $\lim_{x\to 0} f'(x)$ existe et vaut $l$ alors $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = l$.
2. Montrer que, si $(P_n)$ est une suite de polynômes qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f$, alors $f$ est un polynôme.
3. Si $f$ est dérivable en $x$, est-ce que $\frac{f(y)-f(z)}{y-z}$ tend vers $f'(x)$ quand $y$ et $z$ tendent tous les deux vers $x$ $(y \neq z)$ ? Si $f$ est $C^1$ ?
4. Trouver toutes les fonctions dérivables de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telles que $f \circ f = f$.
5. Montrer que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est telle que pour tout $x, y$ on a $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f$ est continue en 0 alors $f$ est linéaire. Et si $f$ n'est pas continue ?
6. Existe-t-il une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ prenant exactement deux fois chaque valeur ?
7. Soit $(X,d)$ un espace métrique (vous pouvez prendre un intervalle si vous voulez). Montrer qu'un inf de fonctions $k$-lipschitziennes sur $(X,d)$ est $k$-lipschitzien ; montrer qu'une fonction uniformément continue sur $(X,d)$ et à valeurs dans $[0,1]$ est limite uniforme de fonctions lipschitziennes.