Exercices sur l'intégration.

Changement de variables, intégration par parties, primitives...

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
7. Si f est paire alors F est impaire.

Exercice 2. Calculer $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$.

Exercice 3. Calculer les primitives suivantes (et donner les intervalles de définition) :

$$\int \frac{dx}{x^2+5}\,; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}\,; \quad \int e^x \sin(e^x)dx\,; \quad \int (\tan(x))^3 dx\,; \int \frac{1}{(\tan(x))^3}dx\,; \quad \int \frac{\ln x}{x}dx\ .$$

Exercice 4. En utilisant le changement de variables $u = \sqrt{e^x - 1}$, calculer $I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

Exercice 5. Calculer les primitives suivantes :

$$\int e^x \cos x dx\,; \quad \int \frac{\ln x}{x^n}dx\ n \in \mathbb{N}\,; \quad \int x \arctan(x)dx\,; \quad \int (x^2+x+1)e^x dx.$$

Exercice 6. Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire l'intervalle de validité des calculs :

$$\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 3x)dx\,; \quad \int \cos x \sin^4 x dx\,; \quad \int \sin^4 x dx\,; \quad \int \mathrm{ch}^2\, x\, \mathrm{sh}^2\, x dx\ .$$

Exercice 7. Décomposer les fractions rationnelles suivantes ; en calculer les primitives.

$$\frac{1}{a^2+x^2}; \quad \frac{x^3}{x^2-4}\,; \quad \frac{4x}{(x-2)^2}\,; \quad \frac{1}{x^2+x+1}\,; \quad \frac{1}{(t^2+2t-1)^2}\,; \quad \frac{3t+1}{t^2-2t+10}\ : \quad \frac{1}{(1+x^2)^2}\,; \quad \frac{1}{t^3+1}\ .$$

$$\frac{x^3+2}{(x+1)^2}\,; \quad \frac{x+1}{x(x-2)^2}\,; \quad \frac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2}\,; \quad \frac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)}\,; \quad \frac{x^7+x^3-4x-1}{x(x^2+1)^2}\,; \quad \frac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)}$$

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx\,;\quad \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx\,;\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx\,;\quad \int_{-1}^1 (\arccos x)^2\,dx\,;\ \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx\ .$$

Exercice 9. Calculer les intégrales de fractions rationnelles suivantes.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2}\,;\quad \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}\,;\quad \int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx\,;\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16}\,;\quad \int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6}\ .$$

Exercice 10. Donner les intervalles de définition, et calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}\,dx\,;\quad \int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\,dx\,;\quad \int \frac{dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,;\quad \int \frac{\cos x}{1+\sin 2x}\,dx\,;\quad \int \frac{dx}{\sin(x)};$$

$$\int \frac{dx}{7+\tan(x)}\,;\quad \int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}\,;\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,;\quad \int \frac{x}{\sqrt{9+4x^4}}\,dx\ .$$

Exercice 11. Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs :

$$\int \sin^8 x\cos^3 x\,dx\,;\quad \int \cos^4 x\,dx\,;\quad \int \frac{1}{2+\sin x+\cos x}\,dx\,;\quad \int \frac{1}{\sin x}\,dx\,;\quad \int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x}\,dx$$

Exercice 12. Soient $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos^2 x\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx$.

1. Calculer I et $I+J$.
2. En déduire J.

Exercice 13. Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $F(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Calculer la dérivée de $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{1+t^2+t^4}$.

Exercice 14. Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(a+b-x) = f(x)$ pour tout x. Calculer $\displaystyle\int_a^b xf(x)\,dx$ en fonction de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.
Application : calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin(x)}\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

Exercice 15. Simplifier $\displaystyle\int_{t=0}^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\,dt + \int_{t=0}^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\,dt$.

Exercice 16. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.

3. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$.

Exercice 17. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Sommes de Riemann

Exercice 18. Montrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ $f\colon x \mapsto x$, $g\colon x \mapsto x^2$ et $h\colon x \mapsto e^x$, sont intégrables sur tout segment de $\mathbb{R}$. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_1^2 g(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_0^x h(t)\,dt$.

Exercice 19. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

Exercice 20. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \;;\quad \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n} \frac{\exp(-\frac{n}{k})}{k^2} \;;\quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k} \;;\quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} \;.$$

Exercice 21. Soient f et g continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Exercice 22. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n^2} \frac{n}{n^2+k^2} \;;\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \;;\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \ln\left(\frac{(3n+6p-4)(n+2p)^2}{3n^3}\right) \;.$$

Exercice 23.

1. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que

$$X^{2n} - 1 = (X^2-1) \prod_{k=1}^{n-1} (X^2 - 2X\cos(\frac{k\pi}{n}) + 1) \;.$$

2. Soit a un réel différent de ± 1. Utiliser la formule ci-dessus pour déterminer la valeur de

$$\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a\cos(t) + 1)dt \;.$$

Exercice 24. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\, dt \right|$ où $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$. Montrer que $I_n \to \int_a^b |f(t)|\, dt$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 25. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{n+k}\right)$.

Exercices théoriques

Exercice 26. Déterminer les fonctions continues par morceaux f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_a^b f(t)dt = (b-a)\sup_{[a,b]} |f|$.

Exercice 27. Soient $0 < a \le b$, et f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et à valeurs réelles. En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, prouver que

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \le \sqrt{\int_a^b (f(t))^2\, dt} \sqrt{\int_a^b (g(t))^2\, dt}\ .$$

Cette inégalité se généralise-t-elle au cas de fonctions à valeurs complexes ?
Application : montrer que $\int_a^b \frac{dx}{x} \le \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

Exercice 28. Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in]0, 1[$ tel que $f(a) = a$.

Exercice 29 (Inégalité de Kolmogorov)**.** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que f et f'' soient bornées.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x + a)$, $f(x)$, et d'une intégrale faisant intervenir f''. En déduire l'inégalité suivante, valable pour tout $a > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f'(x)| \le \frac{2}{a} \sup_{\mathbb{R}} |f| + \frac{a}{2} \sup_{\mathbb{R}} |f''|\ .$$

2. En déduire l'inégalité de Kolmogorov : $\sup_{\mathbb{R}} |f'| \le 2\sqrt{\sup_{\mathbb{R}} |f| \sup_{\mathbb{R}} |f''|}$.

Exercice 30. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Existe-t-il c tel que $\int_a^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx$?
Même question si on suppose cette fois f continue par morceaux sur $[a, b]$ et à valeurs positives.

Exercice 31 (Formules de la moyenne)**.**

1. Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, g positive et continue par morceaux sur $]a, b[$.
   (a) Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)\, dt = f(c) \int_a^b g(t)\, dt$.

(b) Ce résultat est-il vrai si f est une fonction réglée quelconque ? Et si f a une primitive ?

(c) Si g est continue et strictement positive, montrer qu'on peut obtenir $c \in]a, b[$ satisfaisant la condition ci-dessus (on pourra introduire la fonction $G(t) = \displaystyle\int_a^t g(x)dx$ et utiliser le changement de variable $u = a + \dfrac{G(t)(b-a)}{G(b)}$).

(d) Application : Soit f continue au voisinage de 0. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \int_{t=0}^{x} tf(t)\, dt$.

2. On suppose maintenant que $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ sont réglées, que g est positive et décroissante, et on veut montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\, dt = g(a) \int_a^c f(t)\, dt$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

(a) Expliquer pourquoi on peut supposer que $g(a) = 1$ (ce qu'on fait dans la suite), puis pourquoi F admet un minimum m et un maximum M sur $[a, b]$, et pourquoi il suffit de démontrer que $m \leq \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\, dt \leq M$.

(b) Montrer le résultat désiré dans le cas où f est une fonction en escalier. Pour cela, on pourra considérer une subdivision adaptée $(a_0, \ldots, a_n)$, introduire $\alpha_i = \dfrac{1}{a_{i+1} - a_i} \displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} g(t)\, dt$, montrer que $1 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_{n-1}$, et exprimer $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$ en fonction des α_i et des $F(a_i)$.

(c) En déduire le résultat dans le cas général.

Exercice 32 (Inégalité de Jensen)**.** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue convexe. Démontrer que $g\left(\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt\right) \leq \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b g(f(t))\, dt$.

(On pourra penser à utiliser des sommes de Riemann)