Feuille de TD 1.

Exercice 1. Montrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ $f\colon x \mapsto x$, $g\colon x \mapsto x^2$ et $h\colon x \mapsto e^x$, sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. En utilisant des sommes de Riemann, calculer les intégrales $\int_0^1 f(x)\,dx$, $\int_1^2 g(x)\,dx$ et $\int_0^x h(t)\,dt$.

Exercice 2. Déterminer les limites des suites suivantes :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} \quad d_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 3. La suite $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)$ a-t-elle une limite ? Si oui, la déterminer.

Exercice 4.

1. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que

$$X^{2n} - 1 = (X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2X\cos(\frac{k\pi}{n}) + 1\right) .$$

2. Soit a un réel différent de ± 1. Utiliser la formule ci-dessus pour déterminer la valeur de

$$\int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2a\cos(t) + 1)\,dt .$$

Exercice 5. Soient f et g continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Exercice 6 (Inégalité de Jensen)**.** Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue *convexe*, i.e. telle que

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(x_i)$$

dès que les λ_i sont des réels positifs dont la somme vaut 1.
Démontrer que

$$g\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right) \leq \int_0^1 g(f(t))\,dt .$$

(On pourra penser à utiliser des sommes de Riemann)

Exercice 7. Soient $0 < a \leq b$, et f, g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et à valeurs réelles. En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, prouver que

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b (f(t))^2\,dt}\sqrt{\int_a^b (g(t))^2\,dt} .$$

Cette inégalité se généralise-t-elle au cas de fonctions à valeurs complexes ?
Application : montrer que $\int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

Exercice 8. Décomposer en éléments simples (sur $\mathbb{R}$) les fractions rationnelles suivantes ; en calculer les primitives

$$\frac{x}{1+x^2}\ ;\quad \frac{x^4+x^2+1}{x-1}\ ;\quad \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}\ ;\quad \frac{x^3}{(x-3)(x-1)}$$

$$\frac{x^3+2}{(-x+1)^2}\ ;\quad \frac{x+1}{x(x-2)^2}\ ;\quad \frac{2x+1}{x^2+x-3}\ ;\quad \frac{1}{x^3-7x+6}\ ;\quad \frac{4x^2}{x^4-1}$$

Exercice 9. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,dx\ ;\quad \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx;\quad \int_0^{\pi} \cos(2x)e^x\,dx;\quad \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx\ .$$