Feuille 1

Exercice 1 (Ensembles ordonnés : ordres totaux, bons ordres, ordres denses.)

1. Montrer que toute partie finie d'un ensemble totalement ordonné est bien ordonné par rapport à la même relation d'ordre.
2. Montrer que le produit cartésien de deux ensembles totalement ordonnés, muni de l'ordre lexicographique défini à partir des deux ordres, est totalement ordonné. Que peut-on dire si les deux ordres sont bons ?
3. On munit $\mathbb{N}$ de son bon ordre usuel, noté $<$. Montrer que si $A \subset \mathbb{N}$ est un sous-ensemble infini, alors $(A, <)$ est isomorphe à $(\mathbb{N}, <)$.
4. Soit $(X, <)$ un ensemble totalement ordonné. Montrer que $(X, <)$ est un bon ordre si et seulement s'il ne contient pas de suite strictement descendante d'éléments.
5. Montrer qu'un ensemble X muni d'un ordre total $<$ est fini si à la fois $<$ et son inverse définissent des bons ordres sur X.
6. On dira qu'une relation d'ordre total $<$ définie sur un ensemble X est *dense* si pour tous $a, b \in X$ distincts tels que $a < b$, il existe $c \in X$ différent de a et de b tel que $a < c < b$. Montrer que si X et Y sont deux ensembles dénombrables densement ordonnés et qui ne sont ni majorés ni minorés, alors ils sont isomorphes.

Exercice 2 (Segments initiaux)

A. Donner un exemple d'ensemble totalement ordonné $(X, <)$ qui contient un segment initial propre qui n'est pas de la forme $\{x \in X | x < a\}$ pour un certain $a \in X$.

B. Soit $(X, <)$ un ensemble totalement ordonné. Notons I_X l'ensemble des segments initiaux propres de X et $\sigma : X \longrightarrow I_X$ qui associe à chaque $x \in X$ le segment initial propre $X_{<x} = \{y \in X | y < x\}$.

1. Vérifier que σ est injective.
2. Montrer que σ est surjective si et seulement si $(X, <)$ est un bon ordre.
3. Si $(X, <)$ est un bon ordre, montrer que $S(X) = X \cup \{X\}$ admet un bon ordre isomorphe à $(I_X, \subset)$.
4. Que peut-on dire de X si pour tout $x \in X$, $x = X_{<x}$?

Exercice 3 (Propriétés élémentaires des ordinaux)

1. Montrer que l'intersection d'un ensemble X d'ordinaux est le plus petit élément de X.
2. Montrer que tout ensemble non vide d'ordinaux admet une borne supérieure (la décrire).
3. Montrer qu'un ordinal α est un entier naturel (donc, un ordinal fini) si, et seulement si, tout sous-ensemble vide de α a un plus grand élément.
4. Montrer qu'un ordinal α est limite si et seulement si $\alpha = \sup\{\beta | \beta \in \alpha\}$.
5. Soient $(I, \leq)$ un ordre total et $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles bien ordonnés telle que X_i soit un segment initial de X_j pour tout $i < j$. On définit $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. Montrer qu'il existe une unique façon d'ordonner X telle que chaque X_i soit un segment initial de X. Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ la famille d'ordinaux respectivement isomorphes à $(X_i)_{i \in I}$. Montrer que X est isomorphe à la borne supérieure de $\{\lambda_i | i \in I\}$.
6. Montrer que si A est une partie d'un ordinal α, alors l'appartenance définit sur A une relation de bon ordre qui est isomorphe à un ordinal inférieur ou égal à α.

Exercice 4 (Plongements de bons ordres.) Un plongement d'un ensemble ordonné $(X, <)$ dans un autre $(Y, <')$ est une injection $f : X \longrightarrow Y$ qui préserve l'ordre : pour tous $x, x' \in X$, $f(x) < f(x')$ si et seulement si $x < x'$.

1. Montrer que tout bon ordre dénombrable ou fini se plonge dans $(\mathbb{Q}, <)$.
2. Quels sont les bons ordres qui admettent un plongement dans $(\mathbb{R}, <)$?