Feuille de TD 2

Exercice 1. 1. En utilisant le changement de variables $u = \sqrt{e^x - 1}$, calculer $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$.

2. A l'aide d'un changement de variables adéquat, calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \arccos(x)^2\, dx$.

Exercice 2. Soit f une fonction continue de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer, en utilisant un changement de variables, que l'on a

$$\int_0^{\pi} x f(\sin(x))\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin(x))\, dx$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)}\, dx$.

Exercice 3. Calculer les primitives suivantes (et donner les intervalles de définition) :

$$\int \frac{dx}{x^2+5}\,; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}\,; \quad \int e^x \sin(e^x) dx\,; \quad \int \tan^3 x dx\,;$$

$$\int \frac{1}{\tan^3 x} dx\,; \quad \int \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^m} dx,\ m \in \mathbb{N}\,; \quad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad .$$

Exercice 4. Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire l'intervalle de validité des calculs :

$$\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 3x) dx\,; \quad \int \cos x \sin^4 x dx\,; \quad \int \sin^4 x dx\,; \quad .$$

Exercice 5. Calculer les intégales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx\,; \quad \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x\, dx\,; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, dx\,; \quad \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx\ .$$

Exercice 6. Donner les intervalles de définition, et calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}\, dx\,; \quad \int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\, dx\,; \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}\,; \quad \int \frac{\cos x}{1 + \sin 2x}\, dx\,; \quad \int \frac{dx}{\sin(x)};$$

$$\int \sin^8 x \cos^3 x\, dx\,; \quad \int \cos^4 x\, dx\,; \quad \int \frac{1}{2 + \sin x + \cos x}\, dx\,; \quad \int \frac{1}{\sin x}\, dx$$

Exercice 7. Soient $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x \cos^2 x\, dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi} x \sin^2 x\, dx$.

1. Calculer I et $I + J$.
2. En déduire J.

Exercice 8. Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $F(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Calculer la dérivée de $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{1+t^2+t^4}$.

Exercice 9. Simplifier $\displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt$ (combien vaut sa dérivée ? Existe-t-il une relation liant $\arcsin(u)$ et $\arccos(u)$ pour u entre 0 et $\frac{\pi}{2}$?).

Exercice 10. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante et continûment dérivable. On considère les deux intégrales $I_1 = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $I_2 = \displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt$.

1. Rappeler pourquoi f admet une fonction réciproque f^{-1}.
2. Faire le changement de variable $t = f(u)$ dans l'intégrale I_2.
3. Calculer I_2 en fonction de I_1, puis interpréter ce résultat géométriquement.

Exercice 11. Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ tel que $f(a) = a$.

Exercice 12 (Inégalité de Kolmogorov)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que f et f'' soient bornées.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x+a)$, $f(x)$, et d'une intégrale faisant intervenir f''. En déduire l'inégalité suivante, valable pour tout $a > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$:
$$|f'(x)| \leq \frac{2}{a}\sup_{\mathbb{R}}|f| + \frac{a}{2}\sup_{\mathbb{R}}|f''| \ .$$
2. En déduire l'inégalité de Kolmogorov : $\displaystyle\sup_{\mathbb{R}}|f'| \leq 2\sqrt{\sup_{\mathbb{R}}|f| \sup_{\mathbb{R}}|f''|}$.

Exercice 13. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Existe-t-il c tel que $\displaystyle\int_a^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx$? Même question si on suppose cette fois f continue par morceaux sur $[a,b]$ et à valeurs positives.