Feuille 2

Exercice 1 (Somme des ordinaux.)

A. Propriétés élémentaires

Vérifier les propriétés suivantes :

1. (Monotonie stricte à droite) Pour tous ordinaux α, β, β', $\beta < \beta'$ si et seulement si $\alpha+\beta < \alpha+\beta'$.
2. (Régularité à gauche) Pour tous ordinaux α, β, β', $\alpha + \beta = \alpha + \beta'$ si et seulement si $\beta = \beta'$.
3. Montrer que pour tout ordinal α et tout ordinal limite et non nul β, $\alpha + \beta$ est limite.
4. (Associativité) Pour tous ordinaux α, β, γ, $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
5. Montrer que pour tout $n < \omega$ et tout α ordinal infini, $n + \alpha = \alpha$.
6. Vérifier que la somme des ordinaux n'est pas une opération commutative.
7. Donner des exemples d'ordinaux α, α', β tels que $\alpha < \alpha'$ mais que $\alpha + \beta = \alpha' + \beta$.
8. (Monotonie à gauche) Montrer que pour tous ordinaux α, α', β, si $\alpha \leq \alpha'$ alors $\alpha + \beta \leq \alpha' + \beta$.
9. Montrer que pour tout ordinal α, il existe une unique paire (β, n) avec β limite et $n < \omega$, tels que $\alpha = \beta + n$.

B. Une manière de voir

Soient α, β deux ordinaux et $\mathcal{A} = (A, <_A)$, $\mathcal{B} = (B, <_B)$ deux ensembles disjoints, bien ordonnés tels que α et β soient isomorphes à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ respectivement. Montrer que $\alpha + \beta$ est isomorphe à $A \cup B$ muni de la relation d'ordre $<$ définie par... trop évidente pour y consacrer un tiers de la page.

Exercice 2 (Produit des ordinaux.)

A. Propriétés élémentaires

Vérifier les propriétés suivantes :

1. (Monotonie stricte à droite) Pour tous ordinaux α, β, β', avec α non nul, $\beta < \beta'$ si et seulement si $\alpha.\beta < \alpha.\beta'$.
2. (Régularité à gauche) Pour tous ordinaux α, β, β', avec α non nul, $\alpha.\beta = \alpha.\beta'$ si et seulement si $\beta = \beta'$.
3. Montrer que pour tout ordinal α et tout ordinal limite β, l'ordinal $\alpha.\beta$ est un ordinal limite.
4. (Distributivité) Pour tous ordinaux α, β, γ, $\alpha.(\beta + \gamma) = \alpha.\beta + \alpha.\gamma$.
5. (Associativité) Pour tous ordinaux α, β, γ, $(\alpha.\beta).\gamma = \alpha.(\beta.\gamma)$.
6. Vérifier que le produit des ordinaux n'est pas une opération commutative.
7. Donner des exemples d'ordinaux α, α', β non nuls tels que $\alpha < \alpha'$ mais que $\alpha.\beta = \alpha'.\beta$.
8. Montrer que pour tous ordinaux α, α', β, si $\alpha \leq \alpha'$ alors $\alpha.\beta \leq \alpha'.\beta$.
9. (Division euclidienne) Soient α et β, avec $\beta \neq 0$. Montrer qu'il existe une unique paire d'ordinaux (γ, δ) tels que $\alpha = \beta.\gamma + \delta$ et que $\delta < \beta$.

B. Une manière de voir

Soient α et β deux ordinaux. On munit l'ensemble $\alpha \times \beta$ de la relation d'ordre lexicographique suivante : pour tous $x, x' < \alpha$ et $y, y' < \beta$,

$$(x, y) \; < \; (x', y') \quad \text{si et seulement si} \quad y < y' \quad \text{ou} \quad (y = y' \quad \text{et} \quad x < x') \, .$$

Montrer que c'est un bon ordre isomorphe à $\alpha.\beta$.

Exercice 3 (Exponentiation des ordinaux.)

1. Vérifier les propriétés suivantes.
   - Soit $\alpha > 1$. Pour tous ordinaux β, β', $\beta < \beta'$ si et seulement si $\alpha^\beta < \alpha^{\beta'}$.
   - Soit $\alpha > 1$. Pour tous ordinaux β, β', $\beta = \beta'$ si et seulement si $\alpha^\beta = \alpha^{\beta'}$.
   - Si $\alpha > 1$ et β est un ordinal limite non nul, alors α^β est limite.
   - Pour tous ordinaux α, β, γ, avec $\alpha \neq 0$, $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta.\alpha^\gamma$.
   - Pour tous ordinaux α, β, γ, avec $\alpha \neq 0$, $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$.
2. Montrer que si α et β sont deux ordinaux dénombrables, alors il en est de même pour α^β.
3. Montrer qu'il existe un ordinal α tel que $\alpha = \omega^\alpha$. Existe-t-il un ordinal α tel que $\alpha = \alpha^\omega$.

Exercice 4 (Soustraction sur les ordinaux.) Montrer que l'on peut définir une opération $\ominus$ sur les ordinaux, qui a les propriétés suivantes :

- si $\alpha < \beta$, alors $\alpha \ominus \beta = 0$;
- si $\alpha \geq \beta$, alors $\beta + (\alpha \ominus \beta) = \alpha$.