Feuille 2

Exercice 1.

1. On définit par récurrence $\alpha_0 = \omega$, $\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}$ et $\varepsilon_0 = \sup\{\alpha_n \colon n < \omega\}$. Montrer que ε_0 est le plus petit ordinal satisfaisant $\omega^\alpha = \alpha$.
2. Quel est le développement de Cantor de l'ordinal ε_0.
3. Soit $F \colon ON \to ON$ une relation fonctionnelle telle que F soit croissante et continue aux ordinaux limites, c'est-à-dire que si λ est limite alors $F(\lambda) = \sup_{\alpha<\lambda} F(\alpha)$. Montrer que pour tout ordinal α il existe un plus petit $\beta \geq \alpha$ tel que $F(\beta) = \beta$.

Exercice 2. On définit une *suite de Goodstein faible* de la façon suivante : étant donné un terme initial u_0, on écrit u_0 en base 2 : $u_0 = a_n 2^n + \ldots + a_0$, et u_1 est l'entier obtenu en posant $u_1 = (a_n \cdot 3^n + \ldots a_0) - 1$; ensuite u_2 est obtenu en remplaçant la base 3 par la base 4, et ainsi de suite. Par exemple, avec $u_0 = 266$, on a successivement :

$$u_0 = 266 = 2^8 + 2^3 + 2^1; \quad u_1 = 3^8 + 3^3 + 2 = 6590; \quad u_2 = 4^8 + 4^3 + 1 = 65601\ldots$$

Et ainsi de suite (par exemple, toujours avec le même u_0, on obtient $u_{10} = 429982475$)

1. Faire une conjecture sur le comportement de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.
2. Maintenant, on considère une suite d'ordinaux définie comme suit : α_0 est obtenu en remplaçant les 2^k dans le développement binaire de u_0 par des ω (dans notre exemple, $\alpha_0 = \omega^8 + \omega^3 + \omega$) ; de même α_n est obtenu en remplaçant chaque $(n+2)^k \cdot i$ dans le développement en base $(n+2)$ de u_n par $\omega^k \cdot i$. Montrer que, si $\alpha_n > 0$, alors $\alpha_{n+1} < \alpha_n$; et que $u_n = 0$ si et seulement si $\alpha_n = 0$.
3. Qu'en concluez vous ?

Note : une suite de Goodstein est obtenue de manière analogue à ce qui est décrit plus haut, mais à chaque étape on écrit u_n en base n de manière « héréditaire », conduisant à une croissance apparemment très rapide. Pourtant, la même idée que ci-dessus permet de montrer que ces suites sont nulles à partir d'un certain rang. Mais pour le démontrer on a besoin d'une "récurrence jusqu'à ε_0" (dans le cas faible on n'a besoin d'aller que jusqu'à ω^ω) et l'arithmétique de Peano ne permet pas de conduire une telle récurrence. On[1] *peut démontrer que ses axiomes ne suffisent pas pour prouver que les suites de Goodstein fortes tendent vers* 0.

Exercice 3 (Axiome du choix)**.** Une *fonction de choix* sur un ensemble X est une application $\varphi \colon \mathcal{P}(X) \to X$ telle que pour toute partie $A \subseteq X$ non vide, on ait $\varphi(A) \in A$.
Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1. Pour toute famille $(X_i)_{i\in I}$ d'ensembles non vides, le produit $\Pi_{i\in I} X_i$ de ces ensembles est non vide.
2. Tout ensemble X admet une fonction de choix.

1. Au sens de « des gens peuvent le faire », pas de « votre enseignant peut le faire » ...

3. Pour tous les ensembles X, Y et toute application surjective $g\colon X \to Y$, il existe une application $h\colon Y \to X$ telle que $g \circ h$ soit l'application identique de Y dans Y.

Exercice 4. – L'axiome des choix dépendants (ACD) est l'énoncé suivant : pour tout ensemble X et toute relation binaire sur X tels que pour tout $x \in X$ il existe $y \in X$ vérifiant xRy, il existe alors une suite $(x_n)_{n<\omega}$ de X telle que $x_n R x_{n+1}$ pour tout n.
– L'axiome du choix dénombrable (ACden) est l'énoncé : tout produit dénombrable d'ensembles non vides est non vide.

1. Montrer que (AC) implique (ACD).
2. Montrer que (ACD) implique (ACden).

Exercice 5. On rappelle qu'un ensemble est fini s'il est équipotent à un ordinal fini (c.à.d. à un entier $n < \omega$) et qu'un ensemble est dénombrable s'il est équipotent à ω.

Un ensemble X est dit *Dedekind-fini* si toute injection de X dans X est surjective.

1. Montrer que tout ensemble fini est Dedekind-fini.
2. Montrer qu'un ensemble est Dedekind-infini si et seulement s'il contient un sous-ensemble dénombrable.
3. Montrer qu'un ensemble infini est Dedekind-infini.
4. Montrer la question précédente en utilisant (ACden) mais pas (ACD).