Feuille de TD 3.

Exercice 1. Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{e^x - \cos(x) - x}{x^2}$ et $\dfrac{\arctan x - \sin x}{x - \arcsin x}$.

Exercice 2. Donner des équivalents simples pour les fonctions suivantes :

1. $2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$, en 0.
2. $(\cos x)^{\sin x} - (\cos x)^x$, en 0.
3. $\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2}$, en $+\infty$.

Exercice 3. Déterminer le D.L à l'ordre 2 en $\pi/4$ d e $\sin(x)$, et à l'ordre 3 au point 1 de $\dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

Exercice 4. Donner la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx \ ; \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx \, ; \quad \int_1^\infty x^x dx \, ; \quad \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)}dx \ .$$

Exercice 5. Nature de :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t + t^2 e^{-t}} \ ; \quad \int_0^1 \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\, dt \, (\alpha \in \mathbb{R}); \quad \int_0^{+\infty} \ln\Big(\frac{1+t^2}{1+t^3}\Big)\, dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\, dt \, ; \quad \int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}} \ ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(\arctan t)}{t^\alpha}\, dt \ .$$

Exercice 6. Nature de :

$$\int_0^\infty \sin t \sin(\frac{1}{t})\, dt, \ \int_0^\infty \frac{e^{\sin t}}{t}\, dt, \ \int_2^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t} + \sin t}\, dt, \int_0^\infty \cos(\exp(t))\, dt \, , \ \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\, dt \ .$$

Exercice 7. Nature de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\arccos(t)} \ ; \quad \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)(\ln \ln t)} \ ; \quad \int_0^{+\infty} \Big(2 + (t+3)\ln(\frac{t+2}{t+4})\Big) dt \ ;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}\, dt \ (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \ ; \quad \int_0^{+\infty} t^\alpha (1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}})\, dt \ (\alpha \in \mathbb{R}) \ ; \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+1/t)\, dt}{(t^2-1)^\alpha} \ (\alpha \in \mathbb{R})$$

Exercice 8. Nature et calcul de :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 2t + 2} \, ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} \, ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} \, ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2\, dt}{(t^2+1)(t^2+a^2)} \ .$$

Exercice 9. Nature et calcul de :

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}}\, dt \, ; \ \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \, ; \ \int_0^1 \frac{t^5\, dt}{\sqrt{1-t^2}} \, ; \ \int_{-1}^1 \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}} \, ; \ \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}} \ .$$

Exercice 10. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{1+\cos^2(t)}$ en utilisant le changement de variable $u = \tan(t)$ (*si jamais vous trouvez* 0 *: est-ce bien raisonnable ?*).

Exercice 11. Donner un exemple d'une fonction continue positive telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)\,du$ existe mais telle qu'on n'ait pas $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
Donner un exemple de fonction continue positive telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)\,du$ existe mais telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(u))^2\,du$ n'existe pas.

Exercice 12. Soit f une application continue par morceaux de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ possédant une limite ℓ en $+\infty$, telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ existe ; montrer que $\ell = 0$.

Exercice 13. Soit f une fonction uniformément continue sur $[0, +\infty[$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. La conclusion est-elle encore vraie si on suppose seulement f continue ?

Exercice 14. Soit f une application continue de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, il en va de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$. On pourra introduire la fonction $F(x) = \displaystyle\int_1^{x} f(t)\,dt$.

Exercice 15. Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$.

Exercice 16. Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\ln(k))^2$. La série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est-elle convergente ?

Exercice 17 (Lemme d'Abel pour les intégrales impropres)**.** Soient g et h deux fonctions continues sur un intervalle $[a, +\infty[$ et vérifiant les conditions suivantes :
– Il existe un réel M tel que $\left|\displaystyle\int_a^x g(t)\,dt\right| \leq M$ pour tout $x \geq a$.
– La fonction h est décroissante et vérifie $\displaystyle\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$.

En utilisant la première formule de la moyenne, montrer que $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)h(t)\,dt$ est convergente.
Pouvez-vous trouver une autre preuve de ce résultat sous l'hypothèse que f est continue et g de classe C^1 ?