Feuille 3

Exercice 1 (Développement de Cantor.) On montrera que pour tout ordinal non nul α, il existe une écriture et une seule

$$\alpha \;=\; \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \omega^{\alpha_2} \cdot n_2 + \ldots + \omega^{\alpha_m} \cdot n_m$$

où $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_m$ sont des ordinaux et $n_1, n_2, \ldots, n_m$ sont des naturels non nuls.

1. Montrer que pour tout ordinal α, $\alpha \leq \omega^\alpha$.
2. Montrer que pour tout ordinal α, il existe une unique paire (α_1, n_1) tel que
$$\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 \;\leq\; \alpha \;<\; \omega^{\alpha_1} \cdot (n_1 + 1)\ .$$
En déduire qu'il existe un unique $\beta_1 < \omega^{\alpha_1}$ tel que $\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \beta_1$.
3. Montrer par récurrence l'existence du développement de Cantor.
4. Vérifier l'unicité du développement de Cantor.
5. Enoncer un critère de comparaison de deux ordinaux α et β en connaissant leurs développements de Cantor.
6. Montrer que les ordinaux de la forme ω^α sont les ordinaux β tels que $\gamma + \beta = \beta$ pour tout $\gamma < \beta$. En déduire le développement de Cantor de $\alpha + \beta$ connaissant ceux de α et β.
7. En utilisant le développement de Cantor, définir une nouvelle somme $\oplus$ associative, commutative et simplifiable.

Exercice 2 (Axiome du choix : équivalents.) Montrer que les énoncés suivants sont équivalents à l'axiome du choix :

1. Pour tout ensemble non vide A, il existe une fonction $\phi : \mathcal{P}(A) \longrightarrow A$ telle que pour tout $X \in \mathcal{P}(A) \setminus \emptyset$ on ait $\phi(X) \in X$.
2. Pour toute paire d'ensemble X et Y et toute application surjective $g : X \longrightarrow Y$, il existe une application $h : Y \longrightarrow X$ telle que $g \circ h$ soit l'application identique de Y dans Y.

Exercice 3 (Axiome du choix : conséquences.)

1. Tout ensemble infini a un sous-ensemble dénombrable.
2. Montrer que l'union d'une famille dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Exercice 4 (L'axiome du choix et les mathématiques au quotidien.) Montrer les résultats suivants d'analyse classique :

1. Soit X un espace métrique et F une partie de X. Alors F est fermé si et seulement si toute suite convergent d'éléments de F a sa limite dans F.
2. Soit X un espace métrique et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ étant muni de sa topologie usuelle. Alors f est continue (l'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ est un fermé de X) si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in X$, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$.

Exercice 5 (Divers choix.) L'axiome des choix dépendants (ACD) est l'énoncé suivant : pour tout ensemble X et toute relation R binaire sur X tels que pour tout $x \in X$, il existe $y \in X$ vérifiant $R(x, y)$ il existe une suite $(x_n)_{n<\omega}$ de X telle que $R(x_n, x_{n+1})$ pour tout $n < \omega$.

L'axiome du choix dénombrable (ACden) est l'énoncé suivant : tout produit dénombrable d'ensembles non vides est non vide.

1. Montrer que (AC) implique (ACD).
2. Montrer que (ACD) implique (ACden).

Exercice 6 (Ensembles Dedekind-finis.) Un ensemble X est dit Dedekind-fini si toute injection de X dans X est surjective.

1. Montrer que tout ensemble fini est Dedekind-fini.
2. Montrer qu'un ensemble est Dedekind-infini si et seulement si il contient un sous-ensemble dénombrable infini.
3. Montrer qu'un ensemble infini est Dedekind-infini.
4. Montrer la question précédente en utilisant (ACden) mais pas (ACDen).