Feuille de TD 4

Exercice 1. Calculer $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt$, $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}dx$ et $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{|x|}{n})dx$.

Exercice 2. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{nx\sin x}{1+(nx)^\alpha}dx$, où $1<\alpha<2$.

Exercice 3. Calculer $\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$ et $\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx$.

Exercice 4. Calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x}\,(\sin(x))^n\,dx$ et $\lim_{n\to+\infty} n\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx$.

Exercice 5. Calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3}\,dx$.

Exercice 6. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} n\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx = \int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,dx$.

Exercice 7. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une application continue ; calculer $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx^n f(x)dx$.

Exercice 8. Pour chacune des suites suivantes, déterminer si elle converge et, le cas échéant, calculer sa limite :

$$\int_0^1 \frac{x^n\ln(x)}{1+x^2}dx\,;\quad \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}dx\,;\quad n\int_1^{1+\frac{1}{n}}\sqrt{1+x^n}dx\,;\quad \int_0^{1+\frac{1}{n}} x^n\ln(x)dx$$

Exercice 9. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0)=0$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(t^n)dt = 0.$$

Généraliser au cas où $f(0)$ est quelconque.

Exercice 10. Donner un équivalent de $\int_0^n \sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,dx$.

Exercice 11. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une application strictement croissante telle que $f(0)=0,\ f(1)=1$. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (f(t))^n dt.$$

Exercice 12. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, on pose $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est une série convergente pour tout $x > 0$ et calculer sa somme $f(x)$.
2. Comparer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$. Commentaires ?

Exercice 13. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{e^t-1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 14. Soit a un nombre complexe de module différent de 1 et n un entier relatif. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{e^{int}}{e^{it}-a}\,dt$.

Exercice 15. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,dy = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$.

Exercice 16.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x)\right)dx = \ln(2)$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 17. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$, puis que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}\,dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$.