Feuille 4

Exercice 1 (Cardinaux finis.) Montrer que tous les ordinaux finis sont des cardinaux. Montrer que ω est un cardinal.

Exercice 2 (Opérations arithmétiques : bonne définition.)

1. Montrer que pour tous ensembles X_0, X_1, Y_0, Y_1, si $|X_0| = |X_1|$ et $|Y_0| = |Y_1|$, alors $|X_0 \sqcup Y_0| = |X_1 \sqcup Y_1|$, $|X_0 \times Y_0| = |X_1 \times Y_1|$ et $|X_0^{Y_0}| = |X_1^{Y_1}|$.
2. Montrer que si $(X_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ et $(Y_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ sont deux suites d'ensembles tels que $|X_\alpha| = |Y_\alpha|$ pour tout $\alpha < \lambda$, alors $|\bigsqcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha| = |\bigsqcup_{\alpha<\lambda} Y_\alpha|$ et $|\prod_{\alpha<\lambda} X_\alpha| = |\prod_{\alpha<\lambda} Y_\alpha|$.

Exercice 3 (Opérations arithmétiques : propriétés fondamentales.)

1. Soient λ un cardinal infini et $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ une suite de cardinaux non nuls et $\kappa = \sup\{\kappa_\alpha | \alpha < \lambda\}$. Alors, $\sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha = \lambda \cdot \kappa$.
2. Montrer que si κ, λ, μ sont trois cardinaux, alors $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$ et $\kappa^\mu.\lambda^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}$.
3. Montrer que si κ est un cardinal et que $\{\lambda_i | i \in I\}$ est une famille de cardinaux, alors $\prod_{i\in I} \kappa^{\lambda_i} = \kappa^{\sum_{i\in I} \kappa_i}$.
4. Montrer que pour tout $0 < n < \omega$ et κ infini, $\kappa^n = \kappa$.
5. Montrer que si κ est un cardinal infini, alors $\kappa^\kappa = 2^\kappa$.
6. Montrer que $\prod_{n<\omega} \aleph_n = \aleph_\omega^{\aleph_0}$.
7. Montrer que si $(X_i)_{i\leq\alpha}$ est une suite d'ensembles alors $|\bigsqcup_{i\leq\alpha} X_i| = |(\bigsqcup_{i<\alpha} X_i) \bigsqcup X_\alpha|$ et $|\prod_{i\leq\alpha} X_i| = |(\prod_{i<\alpha} X_i) \times X_\alpha|$.

Exercice 4 (Quand on tend vers l'infini...)

1. Trouver des suites cardinaux $(\kappa_i)_{i\in I}$ et $(\lambda_i)_{i\in I}$ tels que $\kappa_i < \lambda_i$ pour tout $i \in I$ mais que $\sum_{i\in I} \kappa_i = \sum_{i\in I} \lambda_i$.
2. Trouver une suite infinie de cardinaux non nuls $(\kappa_i)_{i\in I}$ tels que $\sum_{i\in I} \kappa_i = \prod_{i\in I} \kappa_i$.
3. Calculer $\prod_{0<n<\omega} n$.

Exercice 5 (Les ordinaux au delà du dénombrable...)

1. Montrer que $\omega^{\omega_1} = \omega_1$ (exponentiation ordinale).
2. Montrer que $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ et que $\mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$.

Exercice 6 (Cofinalité : propriétés élémentaires.)

1. Montrer que pour tout ordinal α, $\mathrm{cf}(\alpha)$ est le plus petit ordinal γ tel qu'il existe une fonction $f : \gamma \to \alpha$ dont l'image ne soit pas strictement majorée.
2. Montrer que pour tout ordinal α, $\mathrm{cf}(\alpha)$ est cardinal.
3. Montrer que pour tout ordinal α, $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$. En déduire que $\mathrm{cf}(\alpha)$ est un cardinal régulier.
4. Montrer que si α est un ordinal limite, alors $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$.

Exercice 7 (Cofinalité : régularité, singularité.)

1. Montrer qu'un cardinal infini κ est régulier si, et seulement si, pour tout $\lambda < \kappa$ et toute famille $\{X_\alpha | \alpha < \lambda\}$ avec $|X_\alpha| < \kappa$ pour tout $\alpha < \lambda$, $\left|\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha\right| < \kappa$.
2. Si κ est un cardinal infini, alors montrer que $\mathrm{cf}(\kappa)$ est le plus petit cardinal μ tel que κ soit la réunion de μ ensembles cardinal strictement inférieur à κ.
3. Si κ est un cardinal infini, alors montrer que $\mathrm{cf}(\kappa)$ est le plus petit cardinal γ tel qu'il existe $\lambda_i < \kappa$ pour $i < \gamma$ avec $\kappa = \sum_{i \in \gamma} \lambda_i$.
4. Montrer qu'il existe des cardinaux $\aleph_\alpha$ arbitrairement larges tels que $\aleph_\alpha = \alpha$. Déterminer la cofinalité de vos exemples.
5. Montrer qu'un cardinal non dénombrable $\aleph_\alpha$ à la fois limite et régulier satisfait $\aleph_\alpha = \alpha$.

Exercice 8 (Exponentiation des cardinaux.)

1. Soient κ un cardinal infini et $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$. Montrer que toute fonction croissante $f : \kappa \longrightarrow \lambda$ est constante sur un segment final de κ.
2. Soient κ un cardinal infini et λ un cardinal non nul. Montrer que $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+ \cdot \kappa^\lambda$.
3. Soient n un entier et λ un cardinal non nul. Montrer que $\aleph_n^\lambda = \aleph_n \cdot 2^\lambda$.