Feuille de TD 5.

Exercice 1. Soit $a < -1$. Calculer $\varphi(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+at}$, et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{tdt}{(1+at)^2}$.

Exercice 2. On pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-x/t}\,dt$.

1. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Vérifier que $\varphi''(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

Exercice 3. On pose $I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t)\,dt$.

1. Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Calculer $I'(x)$ et en déduire $I(x)$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt$. Montrer que g est l'unique solution de l'équation différentielle : $y'' + y = f(x)$ telle que $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 5. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{t^2(1+t^2)}\,dt$.

1. Montrer que F et G sont continues sur $\mathbb{R}$. Calculer $F(0)$ et $G(0)$.
2. Etablir l'égalité valable pour tout réel x :

$$F(0) - F(x) + G(x) = C|x|, \text{ où } C = \int_0^\infty \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt.$$

3a. Montrer que G est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifie $G''(x) = F(x)$ pour tout réel x.
3b. En utilisant la question 2, en déduire que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie une équation différentielle du second ordre.
3c. En déduire l'expression de $F(x)$ pour $x > 0$ (on pourra remarquer qur la fonction F est bornée sur $\mathbb{R}$). Calculer enfin $F(x)$ pour tout réel x.
4. Déduire de tout cela la valeur de la constante C.

Exercice 6. Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \exp(-t^2)\,dt\right)^2$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}\,dt$.

1a. Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.
1b. Calculer $F'(x) + G'(x)$ pour $x \geq 0$.
2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^\infty \exp(-t^2)\,dt$ puis de $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2/2)\,dt$.

Exercice 7. On pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}\,dx$.

1. Montrer que $I(\alpha)$ est bien définie lorsque $\alpha \geq 0$.
2. Montrer que la fonction $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $I'(\alpha)$, pour $\alpha > 0$, sous la forme d'une intégrale.
3. Montrer que I est continue en 0.

4a. Soit $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples.

4b. En déduire la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

4c. Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \geq 0$.

Exercice 8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 e^{-tx}\, dx$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer f'' et les limites en $+\infty$ de f et f'.
3. En déduire une expression simple de f.

Exercice 9. Dans cet exercice, on cherche à déterminer toutes les fonctions continues f telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - 2\int_0^x f(t)\cos(x-t)\, dt = 1$$

1. On considère une fonction f comme ci-dessus. Montrer que $f(0) = 1$, puis que f est dérivable et $f'(0) = 2$, et enfin que f est deux fois dérivable et est solution de l'équation différentielle $y'' = 2y' - y + 1$.
2. En déduire la seule valeur possible pour f, et vérifier que cette fonction est bien solution de l'équation considérée au début de l'exercice.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t, x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_n t^n)\, dt$.
Montrer que g admet des dérivées partielles ; les calculer et étudier leur continuité.