Feuille 5 - Théorème de compacité.

Exercice 1. On fixe un langage $\mathcal{L}$; on considère l'ensemble $\mathcal{T}$ des théories complètes dans le langage $\mathcal{L}$, qu'on munit d'une topologie τ de la façon suivante : $U \subseteq \mathcal{T}$ est τ-ouvert si, et seulement si, pour tout $T \in U$ il existe φ telle que $\varphi \in T$ et

$$\langle \varphi \rangle := \{S \in \mathcal{T} \colon \varphi \in S\} \subseteq U \ .$$

1. Montrer que chaque $\langle \varphi \rangle$ est un ouvert-fermé de $\mathcal{T}$, et que $\mathcal{T}$ est un espace topologique séparé. Dans le cas où $\mathcal{L}$ est dénombrable, donner une distance sur $\mathcal{T}$ induisant la topologie τ.
2. Montrer que le théorème de compacité est équivalent à l'assertion selon laquelle $(\mathcal{T}, \tau)$ est un espace topologique compact.

Exercice 2. Soit T une théorie et φ un énoncé tel que $T \models \varphi$. Montrer qu'il existe une partie finie $T' \subseteq T$ telle que $T' \models \varphi$.

Exercice 3. Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble de formules $\Phi(x)$ dans le langage des groupes tel que pour tout groupe G et tout $g \in G$ g satisfait $\Phi(x)$ si et seulement si l'ordre de g est fini.

Exercice 4. Montrer qu'une théorie T qui a des modèles finis de cardinal arbitrairement grand a un modèle infini.

Exercice 5. Soit $\mathcal{L}$ un langage fini, et T une théorie dans le langage $\mathcal{L}$. On suppose que, dans tout modèle de T, les sous-structures engendrées par un nombre fini d'éléments sont finies. Montrer qu'il existe une fonction $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout n, une sous-structure engendrée par n éléments d'un modèle de T est de cardinal inférieur à $f(n)$.

Exercice 6. Soit $\mathcal{L}$ un langage, θ un énoncé de ce langage et T_1, T_2 deux théories dans ce langage qui contiennent θ. On suppose que tout modèle de θ est soit modèle de T_1 soit modèle de T_2 mais jamais des deux. Montrer que T_1 et T_2 sont finiment axiomatisables.

Exercice 7. On rappelle que la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique p (0 ou un nombre premier) est complète pour tout p. À l'aide du théorème de compacité, montrer le *principe de transfert* selon lequel étant donné ϕ un énoncé dans le langage des anneaux, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. ϕ est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique nulle.
2. ϕ est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, pour tout nombre premier p suffisamment grand.
3. ϕ est vrai dans un corps algébriquement clos de caractéristique p pour une infinité de nombres premiers p.

Utiliser ce principe pour montrer que tout application polynomiale de $\mathbb{C}^m$ dans $\mathbb{C}^m$ injective est nécessairement surjective.

Exercice 8. On considère le langage $\mathcal{L} = \{E_i\}_{i<\omega}$ où chaque E_i est un symbole de relation binaire.

1. Écrire les énoncés qui disent que chaque E_i est une relation d'équivalence, que E_0 n'a qu'une seule classe d'équivalence, et que pour tout $i < \omega$, la relation E_{i+1} partitionne chaque classe de E_i en exactement deux classes infinies.
2. Donner un modèle des énoncés ci-dessus ; on notera T la théorie formée par ces énoncés et leurs conséquences.
3. On dit qu'un modèle $\mathcal{M}$ de T est *riche* si pour tout $a \in M$ il existe une infinité de $b \in M$ tels que $\mathcal{M} \models E_i(a, b)$ pour tout $i < \omega$. Montrer que deux modèles riches de T sont ∞-équivalents.
4. Montrer que tout modèle $\mathcal{M}$ de T a une extension élémentaire riche et en déduire que T est complète.
5. La théorie T est-elle $\aleph_0$-catégorique ? κ-catégorique pour un cardinal κ ?