
Feuille d'exercices n° 5

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe. On note E^* son dual topologique.

1. Montrer que si E est de dimension infinie alors E^* aussi.
2. On suppose maintenant que E est un espace vectoriel normé, et on munit E^* de la norme subordonnée. Montrer que si E^* est séparable alors E est séparable.

Exercice 2. Dans cet exercice on considère des espaces ℓ^p réels, et on les munit de leurs normes usuelles.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles bornées. Montrer que $\limsup(u_n+v_n) \leq \limsup(u_n) + \limsup(v_n)$.
2. Montrer qu'il existe une application linéaire continue $L\colon \ell^\infty \to \mathbf{R}$ telle que, pour tout $u \in \ell^\infty$, on ait
$$\liminf(u_n) \leq L(u) \leq \limsup(u_n)$$
3. Calculer la norme de L et montrer que $L(u) \geq 0$ pour tout suite u bornée et à valeurs positives.
4. On considère $\Phi\colon \ell^1 \to (\ell^\infty)^*$ définie par $\Phi(v)(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Rappeler pourquoi Φ est bien définie et continue.
5. Existe-t-il $v \in \ell^1$ tel que $L = \Phi(v)$?

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe. On fixe des formes linéaires continues $f_1, \dots, f_n$ et f telles que pour tout $x \in E$ on ait : $(\forall i \in \{1,\dots,n\}\ f_i(x) = 0) \Rightarrow f(x) = 0$.

1. Montrer que $\{(f(x), f_1(x), \dots, f_n(x))\colon x \in E\}$ est un fermé de $\mathbf{R}^{n+1}$ qui ne contient pas $(1, 0, \dots, 0)$.
2. Montrer qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ tels que $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé, et K un compact convexe non vide de E. On fixe une famille d'applications affines continues $(f_i)_{i\in I}$ telles que $f_i(K) \subseteq K$ pour tout $i \in I$, et $f_i(f_j(x)) = f_j(f_i(x))$ pour tout $x \in K$ et tout $i, j \in I$. On souhaite montrer qu'il existe $x \in X$ tel que $f_i(x) = x$ pour tout $i \in I$.

1. On note $\Delta = \{(x,x)\colon x \in K\}$ et $\Gamma = \{(x, f(x))\colon x \in K\}$.
   (a) Montrer que Δ et Γ sont des convexes compacts de $E \times E$ (on munit $E \times E$ d'une norme produit).
   (b) Montrer que si $\Phi\colon E \times E \to \mathbf{R}$ est une forme linéaire continue sur $E \times E$ alors il existe $\varphi_1, \varphi_2 \in E^*$ telles que l'on ait $\Phi(x,y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$ pour tout $x, y \in E$.
2. On commence par le cas d'une seule fonction : on fixe une fonction affine $f\colon K \to K$ et on souhaite montrer que f admet un point fixe. On raisonne par l'absurde et l'on suppose que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in K$.
   (a) Montrer qu'il existe $\varphi_1, \varphi_2 \in E^*$ et deux réels $\alpha < \beta$ tels que $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) \leq \alpha < \beta \leq \varphi_1(y) + \varphi_2(f(y))$ pour tout $x, y \in K$.
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in K$ on a $\varphi_2(f^n(x)) - \varphi_2(x) \geq n(\beta - \alpha)$, et conclure.
3. Montrer le résultat dans le cas général (c'est le *théorème de Kakutani–Markov*).

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. On rappelle que $\mathrm{co}(A)$ désigne l'enveloppe convexe de A (le plus petit convexe contenant A).
On considère un espace de Hilbert H séparable, de dimension infinie, avec une base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de H. On introduit $K = \left\{\frac{e_n}{n+1}\colon n \in \mathbf{N}\right\} \cup \{0\}$. Montrer que K est compact et que $\mathrm{co}(K)$ n'est pas fermé.

Exercice 6. On munit $\mathbf{R}^n$ de sa topologie usuelle ($n \in \mathbf{N}^*$ un entier fixé) et on considère une partie $A \subseteq \mathbf{R}^n$. On note C l'enveloppe convexe de A, et D l'ensemble des éléments x de $\mathbf{R}^n$ qui s'écrivent sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i$, avec $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ positifs de somme 1 et $a_1, \dots, a_{n+1} \in A$.

1. Montrer que $D \subseteq C$.
2. On souhaite maintenant établir l'inclusion réciproque ; on fixe x tel que $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ avec $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$, $k > n+1$, $\alpha_i > 0$ et $x_i \in K$ pour tout i.
   (a) En appliquant un argument de dimension à $(x_i - x_1)_{i \geq 2}$, montrer qu'on peut trouver $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0$.
   (b) Conclure, en exploitant le fait que pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a $x = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - t\lambda_i) x_i$.

   On vient d'établir le *théorème de Carathéodory.*
3. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et K un compact de E. Montrer que l'enveloppe convexe de K est compacte. L'enveloppe convexe d'un fermé de E est-elle nécessairement un fermé ?

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et C un convexe de E.

1. On suppose C borné. Soit B une boule ouverte qui contient $\overline{C}$, et S la sphère correspondante. Montrer que l'image de S par la projection sur $\overline{C}$ (pour la norme euclidienne) est égale à la frontière ∂C.
2. Montrer que pour tout $x \in \partial C$ il existe un *hyperplan d'appui* en x, i.e. tel que $x \in H$ et C est entièrement contenu dans un des deux demi-espaces délimités par H. Ce résultat est-il vrai en dimension infinie ?
3. Donner une autre démonstration du résultat de la question précédente, valable en dimension infinie, en faisant l'hypothèse supplémentaire que C est d'intérieur non vide.
4. On suppose C compact. Montrer que C est égal à l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

   On pourra raisonner par récurrence sur la dimension, en établissant que, si C est un convexe et H un hyperplan d'appui de C, alors $\mathrm{Ext}(C \cap H) = \mathrm{Ext}(C) \cap H$.

Exercice 8. Une matrice $M \in M_n(\mathbf{R})$ est dite *bistochastique* si ses coefficients sont positifs, et la somme des termes de chaque ligne et chaque colonne vaut 1. On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices bistochastiques dans $M_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_n$ est convexe et compact.
2. Montrer que les matrices de permutation sont les points extrémaux de $\mathcal{B}_n$ (on pourra montrer qu'un point extrémal a au plus $2n - 1$ coefficients non nuls, en minorant la dimension de l'espace des matrices dont le somme des coefficients sur chaque ligne et chaque colonne vaut 0).
3. Montrer que toute matrice bistochastique est une combinaison convexe de matrices de permutations (*théorème de Birkhoff–von Neumann*).

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe, K un compact convexe de E et A un sous-ensemble de K. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalents :

1. $K = \overline{\mathrm{co}(A)}$.
2. $\mathrm{Ext}(K) \subseteq \overline{A}$.