Feuille de TD 6.

Exercice 1. Déterminer, parmi les suites suivantes dans $\mathbb{R}^2$, celles qui convergent et donner leur limite le cas échéant :

$$u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{\sin(n)}{n^2}\right) ;\ v_n = \left(\cos(\frac{1}{n}), \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})\right) ;\ w_n = (\cos(n), \sin(n)) ;\ x_n = \left(\cos(\frac{1}{n})\cos(n), \cos(\frac{1}{n})\sin(n)\right) .$$

(Pour (w_n) on pourra par exemple examiner $w_{n+1} - w_{n-1}$))

Exercice 2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N_1(x, y) = \text{Max}(\sqrt{x^2 + y^2}, |x-y|)$ et $N_2(x, y) = \sqrt{x^2/9 + y^2/4}$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}^2$ et représenter les boules unités fermées associées à ces normes.
2. Montrer que $N_2 \leq \|.\|_\infty \leq \|.\|_2 \leq N_1 \leq \|.\|_1 \leq 4N_2$.
3. Déterminer le plus petit réel $k > 0$, tel que $\|.\|_1 \leq kN_2$. (utiliser Cauchy-Schwarz)

Exercice 3. $N : (x, y) \longmapsto |5x + 3y|$ est-elle une norme de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4. Déterminer si les fonctions suivantes ont une limite quand (x, y) tend vers $(0, 0)$:

$$f_1 : (x, y) \mapsto \frac{|x + y|}{x^2 + y^2} ; \quad f_2 : (x, y) \mapsto \frac{x^3y^3}{x^2 + y^2} ; \quad f_3 : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} ; \quad f_4 : (x, y) \mapsto \frac{\sin(x + y)}{x + y}$$

Exercice 5. Soit $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$. Les écritures suivantes ont-elles un sens ?

$$(i) \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x, y) \quad ; \quad (ii) \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x, y) \quad ; \quad (iii) \lim_{(x,y)\to 0} f(x, y).$$

Exercice 6. Pour chacune des fonctions suivantes, donner son domaine de définition et dire si elle y est continue. Etudier l'existence d'un prolongement par continuité en $(0, 0)$.

1. $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$
2. $g(x, y) = \sin\left(\dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}\right)$

Exercice 7. On considère $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on définit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $\varphi(x, x) = f(x)$ et $\varphi(x, y) = \frac{g(x)-g(y)}{x-y}$ si $x \neq y$. Quelle(s) condition(s) f et g doivent-elles vérifier pour que φ soit continue ?

Exercice 8. On considère N une norme sur $\mathbb{R}^2$, et A une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

1. Pour tout x on souhaite poser
$$f(x) = \inf_{a\in A} N(x - a)$$
Justifier que f est bien définie.
2. Montrer que f est continue (on pourra montrer qu'en fait f est 1-lipschitzienne : pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$ on a $|f(x) - f(y)| \leq N(x - y)$).
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ il existe $a \in A$ tel que $f(x) = d(x, a)$ (on pourra commencer par montrer ce résultat dans le cas particulier où A est bornée). Un tel a est-il unique ?