Feuille 6 - Types. Corrigé de l'exercice 6

On veut montrer la propriété suivante :

Soit T une théorie complète dans un langage dénombrable, et n un entier naturel. Montrer que si $|S_n(T)| > \aleph_0$ alors on a nécessairement $|S_n(T)| \geq 2^{\aleph_0}$, et que dans ce cas on a en fait $|S_n(T)| = 2^{\aleph_0}$.

En TD j'ai commencé à montrer que, si K est un compact métrisable, alors K est soit dénombrable soit de cardinal $2^{\aleph_0}$, ce qui implique le résultat ci-dessus. La preuve faite au tableau était moins que convaincante, donc on la récrit en détail ici.

Commençons par rappeler que K a une base dénombrable d'ouverts $(U_i)_{i<\omega}$, et l'application $x \mapsto \{i \colon x \in U_i\}$ est une injection de K dans $2^{\aleph_0}$, donc le cardinal de K est majoré par $2^{\aleph_0}$.

Ensuite on note U la réunion de tous les ouverts dénombrables de K ; toujours parce que K a une base dénombrable d'ouverts, on voit que U est un ouvert dénombrable. Alors $L = K \setminus U$ est fermé et non dénombrable. De plus, si $l \in L$ alors tout voisinage de l dans K est non dénombrable, donc comme U est dénombrable tout voisinage de l dans L est non dénombrable.

Ainsi, L est un compact non vide et tel que, pour chaque $l \in K$, chaque voisinage de l est non dénombrable. Partant de cela, on peut construire une famille d'ouverts non vides $(U_s)_{s\in\{0,1\}^\omega}$ tels que

1. Pour tout s, $\overline{U_{s\frown 0}} \subset U_s$ et $\overline{U_{s\frown 1}} \subset U_s$
2. Pour tout s $U_{s\frown 0}$ et $U_{s\frown 1}$ sont disjoints
3. Le diamètre de U_s (pour une distance fixée sur K) est plus petit que $2^{-\text{longueur}(s)}$.

Alors pour tout $\alpha \in \{0,1\}^\omega$ on peut poser $\{f(\alpha)\} = \bigcap_n U_{s|n}$, et f est une injection continue de $\{0,1\}^\omega$ dans L.

Pour que la preuve écrite au tableau (utilisant la dérivation de Cantor–Bendixson) soit complète, il fallait justifier que si une intersection $(F_\alpha)_{\alpha<\beta}$ de fermés d'un compact métrisable K est strictement décroissante, alors α est dénombrable. Pour le montrer, on fixe une base dénombrable d'ouverts (U_n) et on considère l'application $N \colon \alpha \mapsto \{n \colon F_\alpha \cap U_n \neq \emptyset\}$. Cette application est injective, et pour tout $\alpha' > \alpha$ on a $N(\alpha') \subsetneq N(\alpha)$. Donc la famille $N(F_\alpha)_{\alpha<\beta}$ est une famille strictement décroissante de parties de $\mathbb{N}$: elle doit être indexée par un ensemble au plus dénombrable, i.e. $\beta < \omega_1$.

Le résultat que l'exercice demandait de démontrer était moins général, puisqu'on ne s'intéressait qu'à des espaces de types. On peut reformuler le premier argument donné ci-dessus dans ce contexte (l'argument est alors un peu simplifié parce qu'on peut considérer des ouvert-fermés) : on considère l'ensemble Φ des formules qui appartiennent à au moins $\aleph_1$ types distincts (c'est-à-dire que l'ouvert fermé déterminé par la formule est non dénombrable). On note V l'ensemble des types qui sont contenus dans Φ ; par définition de Φ le complémentaire de V est au plus dénombrable.

Reste à montrer que, si $\varphi \in \Phi$, on peut écrire $\langle \varphi \rangle = \langle \varphi_0 \rangle \sqcup \langle \varphi_1 \rangle$, où φ_0, φ_1 appartiennent à Φ. On pourra ensuite réiterer cette construction pour construire comme au tableau une injection de $\{0,1\}^{\aleph_0}$ dans K. Le point est crucial est qu'il y a deux types p, q dans V qui contiennent φ ; comme ils sont distincts on peut trouver ψ telle que $\psi \in p$ et $\neg\psi \in q$. Alors $\varphi_0 = \varphi \wedge \psi \in p$ (donc appartient à Φ) et $\varphi_1 = \varphi \wedge \neg\psi \in q$ (donc appartient aussi à Φ).