Feuille 6 - Types.

Exercice 1. Soit $\mathfrak{M}$ une L-structure, T la théorie de $\mathfrak{M}$ et $p \in S_n(T)$. Supposons que pour chaque extension élémentaire $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{M}$, il y a au plus un nombre fini de réalisations de p dans $\mathfrak{N}$ (un tel type est dit *algébrique*).

1. Montrer qu'il existe une formule $\phi(\bar{x})$ qui n'est satisfaite que par un nombre fini d'éléments dans $\mathfrak{M}$.
2. Montrer que toute réalisation de p dans une extension élémentaire de $\mathfrak{M}$ est nécessairement dans $\mathfrak{M}$.
3. Soit $\phi(\bar{x}) \in p$ ayant un nombre fini m de réalisations dans $\mathfrak{M}$, et telle que m soit minimal. Montrer que ϕ *isole* p, c'est-à-dire que p est l'unique type de $S_n(T)$ contenant ϕ.

Exercice 2.
1. Pourquoi la théorie des relations d'équivalence ayant une infinité de classes toutes infinies est-elle complète ?
2. Montrer que cette théorie élimine les quantificateurs.
3. Combien cette théorie a-t-elle de 1-types, de 2-types, de 3-types ?

Exercice 3. Soit $L = \{P_i : i \in \mathbb{N}\}$ où les P_i sont des relations unaires. Soit T la théorie dans le langage L qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints et que chaque P_i est infini.

1. Montrer que T est complète et élimine les quanteurs.
2. Décrire $S_1(T)$. Les types de $S_1(T)$ sont-t-ils réalisés dans chacun des modèles de T ?

Exercice 4. On considère la théorie T de $\mathbb{R}$ en tant que corps. Montrer que $|S_1(T)| = 2^{\aleph_0}$.

Exercice 5. Soit T la théorie des ordres totaux discrets sans extrémités dans le langage $\{<\}$.

1. Donner une axiomatisation de T.
2. Combien T a-t-elle de modèles dénombrables ?
3. Montrer que T n'élimine pas les quantificateurs.
4. On considère le langage $L = \{<, S\}$ où S est une fonction unaire et dans ce langage, la théorie $T' = T \cup \{\forall x\ x < S(x) \wedge \neg\exists y (x < y < S(x))$. Montrer que T' est complète et élimine les quantificateurs.
5. En déduire que T est également complète et décrire les n-types de T.
6. Une théorie est dite *modèle-complète* si pour tous modèles $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de cette théorie, si $\mathfrak{M}$ est sous-structure de $\mathfrak{N}$ alors $\mathfrak{M}$ est sous-structure élémentaire de $\mathfrak{N}$. Montrer que T' est modèle-complète mais que T ne l'est pas.

Exercice 6. Soit T une théorie complète dans un langage dénombrable, et n un entier naturel. Montrer que si $|S_n(T)| > \aleph_0$ alors on a nécessairement $|S_n(T)| \geq 2^{\aleph_0}$, et que dans ce cas on a en fait $|S_n(T)| = 2^{\aleph_0}$.

Exercice 7. Soit T une théorie complète, $\mathfrak{M}$ un modèle de T et $a, b \in M$. Montrer que $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(a, b)$ est uniquement déterminé par $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(a)$ et $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(b/a)$.

Exercice 8. Dans cet exercice on considère le langage $\mathcal{L} = \{<\}$, où $<$ est une relation unaire, et la $\mathcal{L}$-structure $(\mathbb{Q}, <)$, où $<$ est l'ordre usuel sur les rationnels.

1. On définit
$$A = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathfrak{N}^*\} \cup \{2 + \frac{1}{n} : n \in \mathfrak{N}^*\} \ .$$
Montrer que $\mathrm{tp}_{(\mathbb{Q},<)}(1/A) = \mathrm{tp}_{(\mathbb{Q},<)}(2/A)$, mais qu'il n'existe pas d'automorphisme de $\mathbb{Q}$ qui fixe A et envoie 1 sur 2.

2. Soit r un nombre réel irrationnel. On considère deux suites adjacentes (a_i) et (b_i) dans $\mathbb{Q}$ tendant vers r. Montrer que $(\mathbb{Q}, <)$ a une extension élémentaire $\mathcal{Q}$ dans laquelle le type déterminé par $\{a_i < x | i < \omega\} \cup \{x < b_i | i < \omega\}$ est réalisé par une infinité d'éléments.
3. Soit maintenant $c_1, \ldots, c_n, x$ des réalisations de ce type dans $\mathcal{Q}$ et $\phi(x; c_1, \ldots, c_k, d_1, \ldots, d_l)$ une formule satisfaite par x dans $\mathcal{Q}$ avec les a_i dans la base de $\mathcal{Q}$ et d_j dans $\mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe $c'_1, \ldots, c'_k \in \mathbb{Q}$ tels que
$$\mathcal{Q} \models \phi(c, a'_1, \ldots, c'_k, d_1, \ldots, d_l)$$

Exercice 9. Soit $\mathcal{L} = \{E_i : i < \omega\}$ le langage comprenant une infinité dénombrable de symboles de relations binaires.

1. Ecrire une $\mathcal{L}$-formule qui exprime que E_0 et E_1 sont des relations d'équivalence et que E_0 raffine E_1 (c'est-à-dire que toute E_0-classe est contenue dans une E_1-classe)
2. Soit $p \geq 2$ un entier. Axiomatiser la théorie T_p qui exprime que, pour tout n, E_n est une relation d'équivalence n'ayant que des classes d'équivalence infinies, et que pour tout $n \geq 1$ E_{n-1} raffine E_n et chaque E_n-classe est réunion d'exactement p E_n-classes.
3. Soit $M = \omega \times \omega$. On cherche à munir M d'une $\mathcal{L}$-structure en faisant un modèle de T_p. On interprète E_0 par
$$\mathcal{M} \models E_0((a, b), (c, d)) \Leftrightarrow a = c \ .$$
Trouver des interprétations de E_n permettant de faire de M un modèle de T_p.
4. Montrer que T_p est une théorie complète qui élimine les quanteurs.
5. Est-ce que T_p est κ-catégorique pour un cardinal κ infini ? (On pourra justifier, et utiliser judicieusement, le fait que pour tout ensemble infini X les ensembles X et $X \times \omega$ sont équipotents).
6. Donner une description de tous les 2-types $p(x, y) \in S_2(T_p)$. En déduire qu'il n'existe qu'un 2-type isolé.