Feuille de TD 7.

Exercice 1. Soit $n > 0$ un entier. Montrer qu'une norme N sur $\mathbb{R}^n$ ne peut pas être différentiable en 0.

Exercice 2. Donner les domaines de définition et calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$f_1 \colon (x,y) \mapsto 2x^2 - 3xy + 4y^2\,; \quad f_2 \colon (x,y) \mapsto \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}\,; \quad f_3 \colon (x,y) \mapsto \sin(2x-3y)\,;$$
$$f_4 \colon (x,y) \mapsto e^{x^2+xy}\,; \quad f_5 \colon (x,y,z) \to (x+y^2, xyz^2)\,; \quad f_6 \colon (x,y,z) \mapsto \sin(x^2-y^2+z^2)\ .$$

Exercice 3. Soit $f \colon\ ]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leq y \\ y(1-x) & \text{si } x > y \end{cases}$$

Etudier la continuité et la différentiabilité de f.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\ . \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas continues en certains points de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Montrer que les applications suivantes sont de classe C^1. Ecrire leur matrice jacobienne en un point donné.

1. $(x,y) \to \sin(x^2-y^2)$
2. $(x,y) \to (x+y, x-y)$
3. $(x,y,z) \to (xy^2, x^2\exp(y+z), \sin x)$
4. $(x,y,z) \to (x+y^2, xyz^2)$

Exercice 6. On considère les fonctions $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = (\sin(xy), \cos x, \exp(y^2)), \quad g(u,v,w) = uvw.$$

1. Calculer explicitement $g \circ f$.
2. En utilisant l'expression trouvée en (1), calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.
3. Déterminer les matrices jacobiennes $M_f(x,y)$ et $M_g(u,v,w)$ de f et de g.
4. Retrouver le résultat de (2.) en utilisant un produit approprié de matrices jacobiennes.

Exercice 7. Soit $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une fonction différentiable, telle que $g(1,-1,2) = (-1,5)$ et la matrice jacobienne de g en $(1,-1,2)$ soit égale à $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (xy, 3x^2-2y+3)$. Calculer les dérivées partielles de $f \circ g$ en $(1-1,2)$.

Exercice 8. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, et u la fonction définie par $u(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$. Montrer que u est différentiable et que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

Exercice 9. Soit $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{1+xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\right)$ et $g(x, y) = \arctan x - \arctan y$.

1. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles premières de f et de g.
3. Simplifier f à l'aide de g.

Exercice 10. Soit $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq 0$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Étudier la continuité de f et de ses dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.