Feuille 7 - Saturation.

Exercice 1. On considère les structures suivantes, dans le langage des corps : $\mathbb{Q}, \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{R}$, et $\mathbb{C}$ (où $\overline{\mathbb{Q}}$ désigne la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$). Quelles structures de cette liste sont-elles ω-saturées ?

Exercice 2. Soit $\mathcal{M}$ une structure ω-saturée, $\mathcal{N}$ une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ et $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'élements de N. Montrer qu'il existe une famille $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ $(m_0, \ldots, m_k)$ et $(n_0, \ldots, n_k)$ aient le même type.

Exercice 3. Soit le langage $L = \{<, c_i : i \in \mathbb{N}\}$ où $<$ est une relation binaire et les c_i sont des symboles de constante. Soit T la théorie des ordres totaux denses sans extrémités telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$ on ait $c_i < c_{i+1}$.

1. Soit $\mathcal{M}$ un modèle ω-saturé de T. Montrer que l'ensemble A des éléments majorant tous les c_i n'a pas de plus petit élément.
2. Montrer que T est complète et élimine les quanteurs.
3. Construire un modèle dénombrable de T qui contient un plus petit majorant de la suite (c_i).
4. Montrer que T a exactement trois modèles dénombrables non isomorphes.
5. Montrer qu'il existe deux des modèles dénombrables non isomorphes qui se plongent l'un dans l'autre.

Exercice 4. Soit le langage $L = \{P_i, Q_i : i \in \omega\}$ où les P_i et les Q_i sont des relations unaires. Soit T la théorie dans ce langage qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints, que les Q_i sont également deux à deux disjoints et que, pour tout i, j l'intersection $P_i \cap Q_j$ est infinie.

1. Donner un exemple de modèle de T.
2. Expliquer brièvement pourquoi T est complète et élimine les quanteurs.
3. Combien T a-t-elle de modèles dénombrables (à isomorphisme près) ? A-t-elle un modèle dénombrable ω-saturé ?

Exercice 5. Soit $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ deux L-structures.

1. Montrer que si $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ sont ∞-équivalentes et que $\mathfrak{M}$ est ω-saturée alors $\mathfrak{N}$ est ω-saturée.
2. On dit que $f : A \to \mathfrak{N}$ (où $A \subset M$) est une application partielle élémentaire si pour tout $a_1, \ldots, a_n \in A$ et toute formule φ on a

$$\mathfrak{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(f(a_1), \ldots, f(a_n)) \ .$$

Montrer qu'une structure dénombrable ω-saturée est *homogène* : pour toute application partielle élémentaire $f_0 \colon A \to \mathfrak{M}$ définie sur une partie finie A de M, et tout $m \in M$, il existe $n \in N$ tel que l'extension de f_0 obtenue en posant $f(m) = n$ soit encore élémentaire.

3. Montrer que deux structures élémentairement équivalentes, dénombrables et ω-saturées sont isomorphes.

Exercice 6. Soit T une théorie complète dans un langage dénombrable. On dit qu'un modèle $\mathfrak{M}$ de T est *premier* si pour tout modèle $\mathfrak{N}$ de T il existe un plongement élémentaire de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$. On dit qu'un modèle $\mathfrak{M}$ est *atomique* si pour tout $\bar{a} \in M^n$ le type de $\bar{a}$ est isolé.

1. Montrer que tout modèle premier est atomique et dénombrable ; que pensez-vous de la réciproque ?
2. Montrer que deux modèles atomiques dénombrables sont isomorphes.
3. Donner une condition topologique sur la famille $(S_n(T))_{n<\omega}$ qui est équivalente à l'existence d'un modèle premier de T.